ACTA PHYSICA POLONICA

VOL. VI, FASC. 3

WILNO 1937

WYDANE Z ZASIŁKU FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

First reprint by PWN — Polish Scientific Publishers 1969

Neue Mechanik materieller Systeme

Nowa mechanika systemów materialnych

Von MYRON MATHISSON, Warschau

(Eingegangen am 8. September 1937)

Ausserhalb der Materie gelten die Feldgleichungen (= elektromagnetische und Gravitationsgleichungen) *der leeren Welt.* Diese Forderung fassen wir in die Form einer *Variationsgleichung* (§§ 1,2). Dabei lösen wir das materielle System in eine Summe von *Multipolen* auf. Im Falle der Gravitationsgleichungen wird man auf diese Weise auf den Begriff des Gravitationsskeletts geführt (§ 2). Im Gravitationsskelett ist der Pol für die Masse verantwortlich, der Dipol und der Quadrupol für den Drehimpuls (§§ 2, 3, 4, 5). Diese Zuordnung ergibt sich auf verschiedene Weisen, indem wir dem materiellen System bald eine aktive Rolle zuweisen (feld*erzeugende* Massen), bald eine passive (durch äusseres Feld angegriffene Massen). Nach Entwicklung einer Behandlungsmethode für unsere Variationsgleichung, gewinnen wir aus ihr die dynamischen Gesetze, welchen die Bestimmungsstücke unseres Gravitationsskeletts gehorchen müssen. So gelangen wir zwangsläufig zu mechanischen Gleichungen, die, im Vergleich mit den klassischen, neue Glieder enthalten. Neben Gliedern, die nur in äusseren Gravitationsfeldern zur Geltung kommen, erhalten wir ein neues Glied von grösster physikalischer Bedeutung, das an äussere Gravitationsfelder nicht gebunden ist.

Bei der Behandlung des Bewegungsproblems zeigt sich, dass der Drehimpuls als antisymmetrischer Tensor eingeführt werden muss. Der Begriff „Rotationsachse eines starren Körpers" wird nachträglich aus dem Drehimpuls konstruiert (§ 4). Bewegung des Schwerpunkts und Rotation sind miteinander gekoppelt. Der FOKKERsche Ansatz für die Bewegung der Achse eines symmetrischen Kreisels ist unhaltbar (§ 4). Will man das Gravitationsskelett zum vollständigen Gegenstück des klassischen dynamischen Modells eines Körpers ausbilden, so muss man neben dem Dipol einen Quadrupol einführen (§ 5). Die daraus entspringenden Gleichungen enthalten, als Sonderfall, die Präzessionsgleichungen, ein Umstand, der eine Verifikation unserer Ansätze gestattet. (§ 5, Ende). Berücksichtigung des Dipolglieds allein würde in einer Beschränkung auf den Fall der Trägheits*kugel* ihr klassisches Analogon finden.

Die neuen mechanischen Gleichungen lassen einen *Energiesatz* zu. Doch kommt eine neue Art Energie hinzu, *die Beschleunigungsenergie* (§ 6, Ende).

§ 1. Feldgesetze und Beharrungsgesetze

Am Beispiel der MAXWELL-EINSTEINschen Feldgleichungen wollen wir einige fundamentale Überlegungen durchführen. Unter Einführung des Potentialvektors φ_α, lässt sich das Gleichungssystem der Elektrodynamik in einer RIEMANNschen Welt zurückführen auf die 4 Gleichungen zweiter Ordnung

$$L_\alpha(\varphi_\beta) \equiv \Box\, \varphi_\alpha - K_\alpha^\nu\, \varphi_\nu = S_\alpha \qquad (\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu) \tag{1.1}$$

(β ist kein Tensorindex und bedeutet einfach, dass die Operation sich auf einen *Vektor* bezieht) und eine Gleichung erster Ordnung

$$\nabla_\nu\varphi^\nu = 0. \tag{1.2}$$

Die Gleichungen (1.1) sind für Weltstellen gültig, wo es Ladungen gibt; sonst wäre der Stromvektor S_α auf der rechten Seite gleich Null zu setzen (∇_α bedeutet kovariante Differentiation, mit K wollen wir die Krümmungsgrössen bezeichnen). Die Spaltung des Gleichungssystems in ein System (1.1) und eine überzählige Gleichung (1.2) ist, wie man weiss, an keine Einschränkung der Allgemeinheit gebunden und immer erreichbar durch Hinzufügung zu den Potentialen φ_α eines geeigneten Gradienten.

Für den linearen Operator L_α gelten die identischen (d. h., für zwei beliebige Vektorfelder p_α, φ_α gültigen) *Reziprozitätsbeziehungen:*

$$\left.\begin{aligned} p^\alpha L_\alpha(\varphi_\beta) - \varphi^\alpha L_\alpha(p_\beta) &= \nabla_\alpha w^\alpha, \text{ wobei} \\ w_\alpha = p^\nu\nabla_\alpha\varphi_\nu &- \varphi^\nu\nabla_\alpha p_\nu . \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Genügt p_α, als Potentialvektor aufgefasst, den MAXWELL-EINSTEINschen Gleichungen

$$\nabla_\nu f_{\alpha}^{\cdot\,\nu} = 0, \ f_{\alpha\beta} = \nabla_\beta p_\alpha - \nabla_\alpha p_\beta,$$

so hängt $L_\alpha(p_\beta)$ nur von $\nabla_\nu p^\nu$ ab. [Denn es ist $L_\alpha(p_\beta) = 0$ mit den MAXWELL-EINSTEINschen Gleichungen identisch, wenn die Normierung $\nabla_\nu p^\nu = 0$ erfüllt ist.] Es wird daher $L_\alpha(p_\beta)$ für den Gradientenvektor eines Skalarfeldes ξ,

$$p_\alpha = \nabla_\alpha\xi, \tag{1.4}$$

nur von $\nabla_\nu p^\nu$, d. h., von $\Box\,\xi$, abhängen. Wir haben in der Tat

$$L_\alpha(\nabla_\beta\xi) = \Box\nabla_\alpha\xi - K_\alpha^\nu\,\nabla_\nu\xi.$$

Infolge der Beziehung

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi_\lambda - \nabla_\beta \nabla_\alpha \varphi_\lambda = K^{\nu}_{\lambda\beta\alpha} \varphi_\nu, \tag{1.5}$$

haben wir

$$\Box \nabla_\alpha \xi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\alpha \nabla_\nu \xi = \nabla_\alpha \Box \xi + K^{\nu}_{\alpha} \nabla_\nu \xi$$

und daher

$$L_\alpha (\nabla_\beta \xi) = \nabla_\alpha q, \qquad q = \Box \xi. \tag{1.6}$$

Das stetige Skalarfeld ξ sei so gewählt, dass es ausserhalb eines Weltgebiets τ_4 verschwindet. Es verschwindet dort auch das Feld $q = \Box \xi$ (Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von ξ seien immer in nötigem Masse vorausgesetzt).. Nimmt man an, dass im Gebiet τ_4 die Potentiale φ_α und ihre erste Ableitungen stetig sind, so ergibt sich aus (1.3), indem man die Skalardichte

$$\sqrt{g}\, \nabla_\nu u^\nu = \frac{\partial (\sqrt{g}\, w^\nu)}{\partial x^\nu}$$

über τ_4 integriert und die Gleichungen (1.1), (1.6) berücksichtigt:

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, p^\alpha S_\alpha \, d\tau_4 - \int_{\tau_4} \sqrt{g}\, \varphi^\alpha \nabla_\alpha q \, d\tau_4 = 0.$$

Durch partielle Integration und Anwendung des GAUSSschen Satzes auf den Fall eines Feldes, das an der Begrenzungsfläche verschwindet, erhält man, indem man die Normierung (1.2) einführt:

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, \varphi^\alpha \nabla_\alpha q \, d\tau_4 = 0.$$

Es ist daher

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, p^\alpha S_\alpha \, d\tau_4 = 0. \tag{1.7}$$

Nun nehmen wir an, dass der Strom S_α eine zeitartige Weltröhre ausfüllt, ausserhalb der Röhre sollen die Stromkomponenten verschwinden. Wir nennen eine Röhre zeitartig, wenn ihre Begrenzungsfläche durch zeitartige Weltlinien erzeugt werden kann. Wir wählen eine innerhalb der Weltröhre laufende zeitartige Weltlinie als Röhrenachse. σ_3 sei ein 3-dimensionaler Querschnitt der Röhre. Er schneidet die Röhrenachse in einem Punkte P. Die in (1.7) vorkommende Integration werden wir so ausführen, dass wir zuerst über die Schicht zwischen 2 benachbarten σ_3 in-

tegrieren (ihr Abstand ist ds die Weltlinie entlang), das Resultat als Funktion der von einem festen Punkte P_0 der Röhrenachse gezählten Bogenlänge $s = P_0P$ betrachten und endlich über S integrieren. Das Feld p_α, in welches die Röhre eingetaucht ist, entwickeln wir in eine TAYLORreihe für jeden Querschnitt σ_3 mit dem jeweiligen Punkt P von σ_3 als Nullpunkt. Wir nehmen an, dass die Entwicklung für alle Punkte des Querschnitts, die innerhalb der Röhre liegen, gültig bleibt,

$$p_\alpha = (p_\alpha)_0 + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu_0} (x^\mu - x^\mu_0) + \dots, \tag{1.8}$$

und dass beim Integrieren die Funktion p^α durch ihre Entwicklung (1.8) ersetzbar ist. (Die Koeffizienten der Entwicklung sind Funktionen von s allein.) Dann bekommt das Integral in (1.7) die Gestalt

$$\int\limits_S \left[(p_\alpha)_0 E^\alpha + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu_0} E^{\mu\alpha} + \frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial x^\mu_0 \, \partial x^\nu_0} E^{\mu\nu\alpha} + \dots \right] ds.$$

(Über gleiche Indizes wird summiert.)

Man kann es immer auf eine invariante Form bringen, indem man die Ableitungen zu kovarianten Ableitungen ergänzt. Gleichung (1.7) bekommt dann die Gestalt

$$\int\limits_S [p_\alpha e^\alpha + (\nabla_\mu p_\alpha) e^{\mu\alpha} + (\nabla_\mu \nabla_\nu p_\alpha) e^{\mu\nu\alpha} + \dots] \, ds = 0, \tag{1.9}$$

$$(p_\alpha = \nabla_\alpha \xi).$$

Die $e^{\cdots}$ sind Tensorkomponenten, Funktionen von s. Für die p_α und ihre Ableitungen sind in (1.9) ihre Werte längs der Integrationskurve zu nehmen.

Das Glied in der Summe (1.9), das p_α enthält, entspricht einem einfachen Pol, der bei Berechnung der Potentiale ein Glied vom Typus $\frac{E}{r}$ ergeben würde, der Entwicklungsabschnitt, der aus Gliedern mit p_α und $\nabla_\mu p_\alpha$ besteht, entspricht einer Pol- und einer Dipolsingularität, der dreigliedrige Entwicklungsabschnitt entspricht einem Pol, einem Dipol und einem Quadrupol, usf. Näheres darüber s. am Ende von § 2.

Die Gleichung (1.9) ist nicht an die Annahme gebunden, dass (1.1) bis ins Innere der Materie ihre Gültigkeit behalten. Gelten sie (mit absoluter oder ausreichender Genauigkeit) in einer Umgebung der Materieröhre, so setzen wir die bezüglichen Potentiale rein fiktiv ins Röhreninnere glatt fort *(die WEYLschen virtuellen Ausfüllungen)* und bilden die Grössen

$$f_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \varphi_\alpha - \nabla_\alpha \varphi_\beta,$$

$$S_\alpha = \nabla_\beta f_{\alpha}^{;\beta} \qquad (\nabla_\alpha S^\alpha \equiv 0).$$

Genügen im Innern der Röhre die φ_α nicht der Bedingung (1.2), so erzielen wir (1.2) durch Hinzufügung eines passenden Gradienten.

Das Skalarfeld ξ ist (von Voraussetzungen über Stetigkeit und Differentiierbarkeit abgesehen) nur an die Bedingung gebunden, dass es ausserhalb eines beliebig zu wählenden Gebiets τ_4 verschwindet. In (1.9) liegt demnach eine eigenartige Variationsgleichung vor; ξ ist das variierbare Element. Setzen wir voraus, dass unser physikalisches Gebilde durch den einfachen Pol genügend charakterisiert wird *(Punktladung)*, so haben wir die Gleichung

$$\int\limits_S \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} e^\alpha \, ds = 0. \tag{1.10}$$

Wir behandeln sie nach folgender Methode. In jedem Punkte der Weltlinie *spalten wir e^α nach dem Geschwindigkeitsvektor u^α*,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \qquad (u^\alpha u_\alpha) = 1,$$

d. h., wir zerlegen e^α in der Richtung von u^α und in einer zu u^α orthogonalen Richtung:

$$e^\alpha = E\, u^\alpha + {}^*e^\alpha, \qquad {}^*e^\nu u_\nu = 0.$$

Die Grösse ξ verschwindet an den Enden des Integrationsweges. Es ist daher

$$\int\limits_S \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} u^\alpha \, ds = 0.$$

(1.10) kann man demnach wie folgt schreiben:

$$-\int\limits_S \xi \frac{dE}{ds} ds + \int\limits_S {}^*e^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} ds = 0 \tag{1.11}$$

Es ergibt sich daraus das Verschwinden von ${}^*e^\alpha$. Spaltet man nämlich $\nabla^\alpha \xi = g^{\alpha\nu} \dfrac{\partial \xi}{\partial x^\nu}$ nach u^α (in jedem Punkte der Weltlinie), so ist nur die zu u^α normale Komponente von $\nabla^\alpha \xi$ für ${}^*e^\alpha \dfrac{\partial \xi}{\partial x^\alpha}$ von Bedeutung, diese

kann aber *unabhängig von ξ den Integrationsweg entlang variiert werden.* [Man kann ein Feld ξ derart konstruieren, dass in jedem Punkte der Weltlinie der Wert von ξ sowie die 3 Grössen $\underset{i}{C}^{\alpha} \nabla_\alpha \xi$ in 3 von u^α und voneinander unabhängigen Richtungen $\underset{i}{C}^{\alpha}$ $(i = 1, 2, 3)$ vorgeschrieben sind und dergleichen für die höheren Ableitungen, — mit der Einschränkung, dass die gewählten Werte den Voraussetzungen über Stetigkeit und Differentiierbarkeit entsprechen und an den Enden eines Weltlinienbogens verschwinden. Es verschwindet demnach auch das erste Integral in (1.11). Dies ist aber nur dann mit der Variierbarkeit von ξ längs der Weltlinie verträglich, wenn die Bedingung

$$\dot{E} \equiv \frac{dE}{ds} = 0, \qquad E = \text{const.} \tag{1.12}$$

erfüllt ist.]

Gleichung (1.12) enthält ein Beharrungsgesetz: ein Entwicklungsgesetz für eine Grösse (die Ladung), die nur von der Zeit (der Eigenzeit) abhängt. Das Wesentliche ist, dass wir aus Feldgesetzen, die in der 4-dimensionalen Welt gelten, ein Gesetz für die eindimensionale Weltlinie ausgeschält haben.

Es gibt eine zweite Methode zur Ableitung der Beharrungsgesetze aus den Feldgesetzen. Man löst die Gleichungen (1.1) und setzt die gefundenen Potentiale in die Normierungsgleichung (1.2) ein. Die Divergenz $\nabla_\nu \varphi^\nu$ soll identisch verschwinden; identisch, d. h. unabhängig von den Koordinaten des Punktes $O(x_0) \equiv O(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, für welchen wir die φ_α bestimmt haben. Diesen Punkt können wir innerhalb eines 4-dimensionalen Bereiches frei wählen, was der Variierbarkeit von ξ analog ist. Um alle zugänglichen Schlüsse zu ziehen, genügt es, den Punkt $O(x_0)$ innerhalb eines sehr kleinen 4-dimensionalen Gebiets frei wählen zu können. Dieser Umstand bestätigt eine frühere Einsicht, dass wir Gleichungen und Betrachtungsmethoden verwenden können, die nur in gewisser nicht zu kleiner Entfernung von der Materie hinreichend genau sind.

§ 2. *Die Variationsgleichung der Mechanik*

Gehen wir zu unserem Hauptproblem, der Ableitung der Bewegungsgleichungen, über, so bilden die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen die Grundlage. Von diesen Feldgleichungen aus sollen die Beharrungsgesetze gewonnen werden. Die Gravitationsgleichungen sind aber in den Gravitationspotentialen nicht linear. Wir werden sie durch angenährte lineare Gleichungen ersetzen. Es sei nämlich möglich, die Komponenten des Massten-

sors für alle Punkte eines Weltbereiches als eine Summe $g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$ darzustellen, wobei die $\gamma_{\alpha\beta}$ als klein angenommen werden und $g_{\alpha\beta}$ den Masstensor eines gewissen RIEMANNschen Weltbereichs W darstellt. Die metrische Mannigfaltigkeit W werden wir den *Untergrund* nennen und $\gamma_{\alpha\beta}$ als ein Tensorfeld *in* W betrachten. Kovariante Ableitungen, Herauf- und Herunterziehen der Indizes—alles wollen wir auf die Metrik des Untergrundes beziehen. Der Untergrund soll ein mögliches Weltstück darstellen, im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie. Die EINSTEINschen Gleichungen können wir nach den Potenzen der $\gamma_{\alpha\beta}$ entwickeln. Aus den in den $\gamma_{\alpha\beta}$ linearen Gliedern werden die gesuchten linearen Gleichungen bestehen. So gewinnen wir eine Verallgemeinerung der bekannten EINSTEINschen angenäherten Gravitationsgleichungen, in welchen die Welt der speziellen Relativitätstheorie die Rolle eines Untergrundes spielt.

Es seien $K^{\varepsilon}_{\lambda\alpha\beta}$, $K_{\lambda\mu}$, K die Krümmungsgrössen des Untergrundes. Kovariante Differentiation ist, wie gesagt, in Bezug auf die Metrik des Untergrundes zu verstehen. Der gesamte metrische Tensor mit unteren Indizes hat die Komponenten

$$g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} .$$

Für die Komponenten mit oberen Indizes findet man leicht in erster Näherung

$$g^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta} .$$

Es ist tatsächlich, bis auf Grössen zweiter Ordnung,

$$(g_{\alpha\nu} + \gamma^{\alpha\nu})(g^{\beta\nu} - \gamma^{\beta\nu}) = \delta^{\beta}_{\alpha}$$

(gleich dem gemischten Einheitstensor).

Benutzen wir ein Koordinatensystem, das in einem vorgegebenen Punkte für den Untergrund geodätisch ist, so gilt bis auf Grössen zweiter Ordnung für die vollständige Krümmungskomponente $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ der gesamten Metrik $g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$ in diesem Punkte

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = K_{\alpha\beta\lambda\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta\,\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2\gamma_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\gamma_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta\,\partial x^\mu}\right). \quad (2.1)$$

Es gilt weiter in demselben geodätischen Koordinatensystem, für den nämlichen Punkt,

$$\nabla_\beta \nabla_\lambda \gamma_{\alpha\mu} = \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta\,\partial x^\lambda} - \gamma_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} - \gamma_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \nu\end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} = K^{\nu}_{\lambda\beta\alpha};$$

die Dreiindizessymbole beziehen sich auf den Untergrund. Die Krümmung $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ lässt sich nun in dem ins Auge gefassten Punkte folgendermassen darstellen:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = K_{\alpha\beta\lambda\mu} + \frac{1}{2}\left(\nabla_\beta\nabla_\lambda\gamma_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\nabla_\alpha\gamma_{\beta\lambda} - \nabla_\alpha\nabla_\lambda\gamma_{\beta\mu} - \nabla_\mu\nabla_\beta\gamma_{\alpha\lambda}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(K^{\nu}_{\lambda\beta\alpha}\gamma_{\nu\mu} + K^{\nu}_{\lambda\beta\mu}\gamma_{\nu\alpha} + K^{\nu}_{\lambda\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}\right).$$

Wegen ihres invarianten Charakters ist diese Beziehung für jeden Punkt und für beliebiges Koordinatensystem gültig. Es sei

$$\psi^{\beta}_{\alpha} = \gamma^{\beta}_{\alpha} - \gamma\,\delta^{\beta}_{\alpha}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\gamma^{\nu}_{\nu}.$$

Dann beträgt $R_{\beta\mu}$, d. h. $(g^{\alpha\lambda} - \gamma^{\alpha\lambda})\,R_{\alpha\beta\lambda\mu}$, bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$R_{\beta\mu} = K_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\Box\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{2}\left(K^{\nu}_{\beta}\gamma_{\nu\mu} + K^{\nu}_{\mu}\gamma_{\nu\beta}\right) - \gamma^{\alpha}_{\nu}K^{\nu}_{\beta\alpha\mu}$$

$$(\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu);$$

es wird dabei vorausgesetzt, dass die $\gamma_{\alpha\beta}$ die Bedingung

$$\nabla_\nu\psi^{\nu}_{\alpha} = 0 \qquad (2.2)$$

erfüllen. R^{β}_{μ} berechnen wir als $(g^{\beta\nu} - \gamma^{\beta\nu})\,R_{\nu\mu}$:

$$R^{\beta}_{\mu} = K^{\beta}_{\mu} - \frac{1}{2}\Box\gamma^{\beta}_{\mu} + \frac{1}{2}(K^{\beta}_{\nu}\gamma^{\nu}_{\mu} - K^{\nu}_{\mu}\gamma^{\beta}_{\nu}) - \gamma^{\alpha}_{\nu}K^{\nu\beta}_{\cdot\cdot\alpha\mu}.$$

Daraus folgt

$$R = K - \Box\gamma - \gamma^{\alpha}_{\nu}K^{\nu}_{\alpha}.$$

Es sei $L^{\mu}_{\lambda}(\psi_{\alpha\beta})$ ein linearer Differentialausdruck (in Bezug auf die $\psi_{\alpha\beta}$), den wir folgendermassen definieren:

$$L^{\mu}_{\lambda}(\psi_{\alpha\beta}) \equiv -\frac{1}{2}\Box\psi^{\mu}_{\lambda} + \frac{1}{2}(K^{\mu}_{\nu}\psi^{\nu}_{\lambda} - K^{\nu}_{\lambda}\psi^{\mu}_{\nu} + \delta^{\mu}_{\lambda}K^{\nu\varepsilon}\psi_{\nu\varepsilon}) - K^{\nu\mu}_{\cdot\cdot\varepsilon\lambda}\psi^{\varepsilon}_{\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2}(K^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\lambda}K)\,\psi^{\nu}_{\nu}. \qquad (2.3)$$

Dann ist

$$R_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\lambda}^{\mu} R = K_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\lambda}^{\mu} K + L_{\lambda}^{\mu}\,. \tag{2.4}$$

(Durch Herunterziehen von μ ensteht aus L_{λ}^{μ} ein Tensor, der in Bezug auf λ, μ unsymmetrisch ist).

Es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, dass die Normierungsgleichungen (2.2) bestehen. Ist es nämlich nicht von vornherein der Fall, so können wir setzen:

$$\psi_{\alpha\beta} = \bar{\psi}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\zeta_{\beta} + \nabla_{\beta}\zeta_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\nabla_{\nu}\zeta^{\nu}.$$

$$\text{d. h.,}\quad \gamma_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\zeta_{\beta} + \nabla_{\beta}\zeta_{\alpha}$$

(das läuft aber auf eine infinitesimale Koordinatentransformation hinaus)—und die Bedingungen (2.2) für die neuen Potentiale $\psi_{\alpha\beta}$ realisieren, indem wir die ζ_{α} aus den Gleichungen bestimmen:

$$\Box\zeta_{\lambda} + \nabla_{\nu}\nabla_{\lambda}\zeta^{\nu} - \nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}\zeta^{\nu} = \nabla_{\nu}\psi_{\lambda}^{\nu}.$$

Durch Anwendung der Formel (1.5) erhält man

$$\Box\zeta_{\lambda} + K_{\lambda}^{\nu}\,\zeta_{\nu} = \nabla_{\nu}\psi_{\lambda}^{\nu}\,.$$

Indem man aus diesen Gleichungen die ζ_{λ} bestimmt, kann man stets das Bestehen von (2.2) erzwingen.

Die linearen Differentialausdrücke $L_{\lambda}^{\mu}(\psi_{\alpha\beta})$ erfüllen identische Reziprozitätsbeziehungen, die den Beziehungen (1.3) ganz analog sind:

$$\left.\begin{aligned} p_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(\psi_{\lambda\mu}) - \psi_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(p_{\mu\nu}) &= \nabla_{\alpha} w^{\alpha}, \text{ wobei} \\ w_{\lambda} = p^{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}\psi_{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}p_{\alpha\beta}&;\quad p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Wir wollen jetzt nach (2.3) $L_{\lambda}^{\mu}(p_{\alpha\beta})$ berechnen für

$$p_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha}\,. \tag{2.6}$$

Dazu werden wir uns einer zu (1.5) analogen Formel bedienen, die für jeden kovarianten Tensor $A_{\lambda\mu}$ gültig ist:

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}A_{\lambda\mu} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}A_{\lambda\mu} = K_{\lambda\beta\alpha}^{\varepsilon}A_{\varepsilon\mu} - K_{\mu\beta\alpha}^{\varepsilon}A_{\lambda\varepsilon}\,. \tag{2.7}$$

Aus der BIANCHIschen Identität

$$\nabla_\alpha K^{\varepsilon}_{\mu\lambda\beta} + \nabla_\lambda K^{\varepsilon}_{\mu\beta\alpha} + \nabla_\beta K^{\varepsilon}_{\mu\alpha\lambda} = 0$$

folgt

$$\nabla_\alpha K_{\varepsilon\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha} = \nabla_\mu K_{\lambda\varepsilon} - \nabla_\varepsilon K_{\lambda\mu}. \tag{2.8}$$

Aus (1.5) ergibt sich

$$\Box \nabla_\lambda \xi_\mu = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\nabla_\lambda \nabla_\beta \xi_\mu + K^{\varepsilon}_{\mu\lambda\beta}\, \xi_\varepsilon)$$

und dann aus (2.7) und (2.8)

$$\Box \nabla_\lambda \xi_\mu = \nabla_\lambda \Box \xi_\mu + K^{\varepsilon}_{\lambda} \nabla_\varepsilon \xi_\mu + 2K^{\varepsilon}_{\mu\lambda\alpha} \nabla^\alpha \xi_\varepsilon +$$
$$+ \xi^\varepsilon (\nabla_\mu K_{\lambda\varepsilon} - \nabla_\varepsilon K_{\lambda\mu}). \tag{2.9}$$

(Wir schreiben $\nabla^\alpha \xi_\varepsilon$ anstatt $g^{\alpha\nu}\nabla_\nu \xi_\varepsilon$.) Wir führen jetzt für den Untergrund folgende Voraussetzung ein:

$$\left. \begin{aligned} & K^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\mu} K = \alpha \delta^{\mu}_{\lambda} \qquad (\alpha = const.) \\ & \text{d. h.,}\ K = -4\alpha, \quad K^{\mu}_{\lambda} = -\alpha\delta^{\mu}_{\lambda}. \end{aligned} \right\} \tag{2.10}$$

(2.3) bekommt die einfache Gestalt

$$L_{\lambda\mu}(\psi_{\alpha\beta}) \equiv -\frac{1}{2} \Box \psi_{\lambda\mu}$$

(es wird also $L_{\lambda\mu} = L_{\mu\lambda}$).

Dann haben wir für das Feld (2.6) die einfache Beziehung, die wir nach (2.9) berechnen:

$$\left. \begin{aligned} & L_{\lambda\mu}(p_{\alpha\beta}) = \nabla_\lambda q_\mu + \nabla_\mu q_\lambda,\ \text{mit} \\ & q_\lambda = -\frac{1}{2}(\Box \xi_\lambda - \alpha\, \xi_\lambda). \end{aligned} \right\} \tag{2.12}$$

Der Untergrund wird im folgenden die Rolle des *äusseren* Gravitationsfeldes spielen, dem sich das Feld eines Körpers überlagert. Durch (2.10) werden nur solche äussere Felder zugelassen, die *ausserhalb ungeladener Materie* herrschen (die Konstante α vermittelt die kosmologische Erweiterung). Das ist jedenfalls eine sehr umfangreiche Klasse von Gravitationsfeldern.

Die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen

$$(G_\lambda^\mu \equiv) R_\lambda^\mu - \frac{1}{2}\,\delta_\lambda^\mu R - \alpha\delta_\lambda^\mu = -\varkappa T_\lambda^\mu \tag{2.13}$$

ersetzen wir, nach (2.4) und (2.10), durch die linearen Gleichungen

$$L_\lambda^\mu\ (\psi_{\alpha\beta}) = \mu_\lambda^\mu\ \ (\mu_{\lambda\mu} = \mu_{\mu\lambda}), \tag{2.14}$$

$$\nabla_\nu \psi_\lambda^\nu = 0. \tag{2.15}$$

Indem wir das elektromagnetische Feld ausschliessen, nehmen wir an, dass μ_λ^μ ausserhalb einer zeitartigen Weltröhre verschwindet. Die Ausfüllung μ_λ^μ der Weltröhre können wir, genau nach dem Muster der vorher behandelten elektromagnetischen Gleichungen, als eine *virtuelle Ausfüllung* betrachten, die aus einer glatten Fortsetzung einer ausserhalb der Röhre vorhandenen Lösung entspringt. Als virtuelle Ausfüllung benutzen wir (einer Idee von WEYL folgend) den durch die linke Seite von (2.13) definierten Tensor G_λ^μ, in welchem wir nur Glieder erster Ordnung in den $\gamma_{\alpha\beta}$ berücksichtigen. Für den so entstehenden Tensor M_λ^μ besteht die Identität

$$\nabla_\nu M_\lambda^\nu \equiv 0, \tag{2.16}$$

die der bekannten Identität für den vollen Tensor G_λ^μ entspricht. (M_λ^μ unterscheidet sich von L_λ^μ durch Glieder, die gleichzeitig mit $\nabla_\nu \psi_\lambda^\nu$ verschwinden). Setzen wir Lösungen von $L_\lambda^\mu = 0$ glatt ins Röhreninnere fort, indem wir für sie $\mu_\lambda^\mu = M_\lambda^\mu$ konstruieren, so bekommen wir ein μ_λ^μ - Feld, das die postulierten Eigenschaften besitzt und die Gleichungen

$$\nabla_\nu \mu_\lambda^\nu = 0 \tag{2.17}$$

erfüllt. Das Feld ξ^α von (2.6) soll, seiner Rolle und seinen Eingeschaften nach, dem Skalarfeld ξ von § 1 völlig analog sein. Auch das Vektorfeld ξ^α soll ausserhalb eines (beliebig zu wählenden) Weltgebiets τ_4 mit einer gewissen Anzahl seiner Differentialquotienten verschwinden, sonst kann es beliebig gewählt werden. Indem man die Reziprozitätsbeziehung (2.5) mit $\sqrt{g}$ multipliziert und über τ_4 integriert, bekommt man, wegen

$$\nabla_\nu w^\nu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, w_\nu)}{\partial x^\nu}, \qquad \int_{\tau_4} \frac{\partial (\sqrt{g}\, w^\nu)}{\partial x^\nu}\, d\tau_4 = 0,$$

die Gleichung

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, p^{\alpha\beta} \mu^{\alpha\beta}\, d\tau_4 - 2 \int_{\tau_4} \sqrt{g}\, \psi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha q_\beta d\tau_4 = 0.$$

Man beweist durch partielle Integration, dass das zweite Integral infolge der Normierungsgleichungen (2.2) für $\psi_{\alpha\beta}$ und des Verschwindens von q_α auf der Begrenzungsfläche verschwindet. Mithin

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, p_{\alpha\beta} \mu^{\alpha\beta}\, d\tau_4 = 0 \text{ für} \\ &p_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

in voller Analogie mit (1.7). Der Übergang zu einem Integral längs einer Weltlinie geschieht ebenso wie für (1.7), und man gelangt zu einer Gleichung, die der Gleichung (1.9) entspricht:

$$\int_s [p_{\alpha\beta}\, m^{\alpha\beta} + (\nabla_\lambda\, p_{\alpha\beta}) m^{\lambda\alpha\beta} + \ldots]\, ds = 0. \tag{2.19}$$

Das ist unsere *Variationsgleichung der Mechanik.*

Setzen wir voraus, dass unser physikalisches Gebilde durch den einfachen Pol genügend charakterisiert wird *(Punktmasse),* so haben wir die Gleichung

$$\int_s m^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \xi_\beta\, ds = 0. \tag{2.20}$$

In jedem Punkte der Weltlinie spalten wir $m^{\alpha\beta}$ nach dem jeweiligen Geschwindigkeitsvektor u^α, d.h., wir zerlegen es nach der Formel

$$m^{\alpha\beta} = M u^\alpha u^\beta + M^\alpha u^\beta + M^\beta u^\alpha + {}^*m^{\alpha\beta}, \text{ wobei} \tag{2.21}$$

$${}^*m^{\alpha\beta} u_\beta = 0, \qquad M^\alpha u_\alpha = 0.$$

Unter dem Integralzeichen wird es Glieder geben, in welchen Differentialquotienten von ξ_α in Richtungen, die zu u^α orthogonal sind, vorkommen. Diese Glieder fügen sich zu

$$({}^*m^{\alpha\beta} + M^\alpha u^\beta) \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} \tag{2.22}$$

zusammen. Es steht uns frei für $4.3 = 12$ Grössen

$$\left.\begin{array}{ll} \underset{i}{c}^{\nu} \dfrac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\nu} & (i = 1, 2, 3;\ \beta, \nu = 0, 1, 2, 3) \\ (\underset{i}{c}^{\nu} u_\nu = 0) & \end{array}\right| \tag{2.23}$$

eine Wahl zu treffen, die unabhängig von der Wahl der ξ_β längs der Weltlinie ist. Dann aber folgt aus (2.20), dass die Gliedergruppe (2.22), über s integriert, für sich allein Null ergibt. Daraus folgt aber

$$^*m^{\alpha\beta} + M^\alpha u^\beta = 0 \tag{2.24}$$

und durch Multiplikation mit u^α

$$^*m^{\alpha\beta} = 0, \qquad M^\alpha = 0. \tag{2.25}$$

Jetzt kann Gleichung (2.20) wie folgt geschrieben werden:

$$\int_s M u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta \, \mathrm{d}s = 0. \tag{2.26}$$

Es ist aber

$$M u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta = u^\alpha \nabla_\alpha (M u^\beta \xi_\beta) - u^\alpha \nabla_\alpha (M u^\beta) \xi_\beta \,. \tag{2.27}$$

Das erste Glied rechts ist einfach die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ eines Skalars. Das ξ^α - Feld verschwindet an den Endpunkten des Integrationsweges, sonst aber ist es längs der Weltlinie frei wählbar. Es folgt daher aus (2.26), (2.27):

$$u^\alpha \nabla_\alpha (M u^\beta) = 0 \tag{2.28}$$

oder, in entwickelter Gestalt,

$$\frac{\mathrm{d}\,(M u^\lambda)}{\mathrm{d}\, s} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\ \beta \\ \lambda \end{matrix} \right\} M u^\alpha u^\beta = 0. \tag{2.29}$$

Indem man (2.28) mit u_β multipliziert und die Normierung $u_\beta u^\beta = 1$ berücksichtigt, erhält man noch

$$\dot{M} = \frac{\mathrm{d}\, M}{\mathrm{d}\, s} = 0, \qquad M = const. \tag{2.30}$$

So führt Gleichung (2.20) zum Bewegungsgesetz (Beharrungsgesetz) (2.29) mit einer konstanten Masse. Es ist klar, dass (2.29) zusammen mit (2.24) und (2.25) die hinreichende Bedingung für (2.20) darstellt.

Die Gleichungen (1.9) und (2.19) haben wir aus den Gleichungen (1.7) und (2.18) abgeleitet. Diese aber sind nur dann mit der Willkür unserer Felder ξ, ξ_α verträglich, wenn zugleich die Kontinuitätsgleichungen

$$\nabla_\nu S^\nu = 0, \qquad \nabla_\nu \mu^{\lambda\nu} = 0 \tag{2.31}$$

bestehen. Da (1.7) und (2.18) unter Benutzung der Eichung (1.2) und (2.15) aus den Feldgleichungen (1.1) und (2.14) folgt, so sieht man ein, dass die Bedingungen (2.31) erfüllt sein müssen, wenn die Eichung nicht zu Widersprüchen führen soll.*

Das Gravitationsskelett. Indem wir Gleichungen (2.19) am Glied, das Differentialquotienten r-ter Ordnung von $p_{\lambda\mu}$ enthält, abbrechen, lösen wir unser materielles System in eine Summe von Multipolen auf. Wir sagen, dass wir das System durch sein *Gravitationsskelett* ersetzen.

Die Lösungen $\psi_{\alpha\beta}$ eines Systems (2.14) sind (für ein CAUCHY-Problem) entweder retardierte Potentiale (euklidische Welt als Untergrund) oder Lösungen FREDHOLMscher Integralgleichungen, in welchen das freie Glied (die gegebene Funktion) ein retardiertes Potential ist. Indem man die Funktionen μ_α^β in eine schmale zeitartige Röhre einschliesst und diese auf eine Weltlinie zusammenschrumpfen lässt, bekommt man für die retardierten Potentiale im einfachsten Fall einen einfachen Pol, d. h. einen Ausdruck vom Typus $m\,\varphi\,(x_0, x)$, der von einem Aufpunkt $O\,(x_0)$ und vom Ort $A\,(x)$ des Pols von der Stärke m abhängt. $O\,(x_0)$ und $A\,(x)$ gehören derselben geodätischen Nullinie, φ wird wie $\frac{1}{r}$ unendlich für $O\,(x_0) \to A\,(x)$; dabei ist r eine dem gewöhnlichen $r\,(x_0, x)$ analoge, invariant definierte Grösse, die für $O\,(x_0) \to A\,(x)$ gegen Null konvergiert.** Dipole (Lösungen mit Singularitäten vom Typus eines klassischen Dipols, Unendlichwerden wie $\frac{1}{r^2}$) kann man erhalten, indem man zwei Pollinien gegen eine einzige Weltlinie konvergieren lässt, u. dgl. für höhere Multipole. Die Singularitäten gehen in die Lösungen der FREDHOLMschen Gleichungen über.

Es seien nun die $\psi_{\alpha\beta}$ Lösungen von $L_{\mu\nu} = 0$, die nach (2.15) geeicht sind und beim Annähern an die Weltlinie wie $\frac{1}{r}$ unendlich werden. Die Singularitätenlinie sei dem Gebiet τ_4 durch eine schmale Röhre (einen Kanal) entzogen. Indem wir die Reziprozitätsbeziehung (2.5) über das neue kleinere Gebiet τ'_4 integrieren, erhalten wir, da in τ'_4 $L_{\mu\nu} = 0$ ist,

---

* Aus den Gleichungen (2.31) folgen unmittelbar die Gleichungen (1.7) und (2.18). Das wäre der kürzeste Weg zu unseren Variationsgleichungen (1.3) und (2.19). Ihr Zusammenhang mit den Feldpotentialen wäre dabei beiseite gelassen.

** S. die Literaturangaben am Ende der Arbeit.

$$\int_{\tau'_4} \left[\frac{\partial (\sqrt{g}\, w^\nu)}{\partial x^\nu} + 2\sqrt{g}\, \psi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha q_\beta \right] d\,\tau_4 = 0.$$

Wegen der Eichung (2.15), ist

$$\psi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha q_\beta = \nabla_\alpha (\psi^{\alpha\beta} q_\beta),$$

und wir haben

$$\int_{\tau'_4} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g}\, w^\nu + 2\sqrt{g}\, \psi^{\nu\beta} q_\beta)\, d\tau_4 = 0.$$

Die linke Seite transformiert sich, nach dem GAUSSschen Satz, in ein Flächenintegral. Da die Felder $\xi_\alpha, \nabla_\alpha \xi_\beta, q_\alpha$ auf der Begrenzungsfläche von τ_4 verschwinden, kommt im Flächenintegral nur das Integral über die Röhrenfläche vor. Da die $\psi_{\alpha\beta}$ voraussetzungsgemäss wie $\frac{1}{r}$ unendlich werden, die Oberfläche eines raumartigen Querschnitts des Kanals aber beim Zusammenziehen das Kanals wie r^2 gegen Null konvergiert, verschwindet beim Zusammenschrumpfen des Kanals das Glied mit q_β und das Glied mit $\nabla_\lambda p_{\alpha\beta}$. $p_{\alpha\beta}$ kann man durch das erste Glied der TAYLOR-Entwicklung [s. (1.8)] ersetzen, da das folgende von der Ordnung r ist. Sind die $\psi_{\alpha\beta}$ von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, so können die Glieder mit $\nabla_\lambda p_{\alpha\beta}$ und q_β einen für $r \to 0$ nicht verschwindenden Beitrag geben. q_β ist aber eine Linearkombination der $\nabla_\lambda p_{\alpha\beta}$:

$$q_\beta = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\beta = g^{\mu\nu} \nabla_\mu p_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\beta (g^{\mu\nu} p_{\mu\nu}).$$

Man kann also die Gleichung (2.19) *und ebenso die Gleichung* (1.9) *begründen ohne virtuelle Ausfüllungen zu benutzen, indem man Lösungen mit Singularitätenlinien (Multipollinien) betrachtet.* Es folgt aus unseren Betrachtungen, dass die Potentiale mindenstens wie $\frac{1}{r^{n+1}}$ unendlich werden müssen, damit in (2.19) Differentialquotienten von $p_{\alpha\beta}$ von der Ordnung n vorkommen. Aus der Betrachtung eines klassischen (d. h., statischen) Multipols, für welchen eine Gleichung (1.9) oder (2.19) leicht zu berechnen ist, zieht man den Schluss, dass die Potentiale nicht *mindenstens,* sondern *gerade* wie $\frac{1}{r^{n+1}}$ unendlich werden müssen.

Indem man die Gravitationspotentiale in der Umgebung der Singularitätenlinie angibt, kann man die linke Seite von (2.19) als ein Flächenintegral oder ein Grenzwert eines Flächenintegrals berechnen,.

Die Charakterisierung des Systems durch eine Weltlinie und Gravitationspotentiale in ihrer Umgebung ist somit zugleich eine Angabe seines Gravitationsskeletts.

Ein Potential $\breve{\varphi}_\lambda = \nabla_\lambda \xi$ (ξ - ein beliebiges Skalarfeld) genügt sicherlich den MAXWELLschen Gleichungen (die wir als bereits auf Potentiale zurückgeführt voraussetzen) der leeren, stromlosen Welt, denn das entsprechende elektromagnetische Feld verschwindet identisch. Sollen die Potentiale die Eichung (1.2) erfüllen, so kann man noch das Skalarfeld ξ zwischen den Lösungen der Gleichung $\Box \xi = 0$ beliebig wählen. Es folgt daraus, dass es immer möglich ist, *physikalisch unwesentliche Multipole* hineinzuführen, indem man zu den Potentialen unwesentliche Potentiale

$$\breve{\varphi}_\lambda = \nabla_\lambda \xi, \qquad \Box \xi = 0 \tag{2.32}$$

hinzufügt, deren erzeugendes Skalarfeld ξ auf gewissen Weltlinien Multipolsingularitäten besitzt. *Doch ist Gleichung (1.9) von diesen physikalisch unwesentlichen Singularitäten unabhängig.* Wir benutzten nämlich zu ihrer Ableitung den (wahren oder virtuellen) Strom, auf welchen die Potentiale (2.31) keinen Einfluss haben *(Eichinvarianz).*

Ganz ähnliche Verhältnisse finden wir bei Betrachtung der Gravitationsgleichungen. Die Rolle der Potentiale (2.31) übernehmen nunmehr die Gravitationspotentiale

$$\breve{\gamma}_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda \tag{2.33}$$

(ξ_λ - ein beliebiges Vektorfeld), die man zu den $\gamma_{\lambda\mu}$ addieren kann. Sie erfüllen identisch die Gleichungen (2.14) für $\mu_{\lambda\mu} = 0$, wobei $\psi_{\alpha\beta}$ nach der Formel

$$\psi_\alpha^\beta = \breve{\gamma}_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \breve{\gamma}_\nu^\nu \delta_\alpha^\beta$$

mit den $\breve{\gamma}_{\lambda\mu}$ zusammenhängt und ξ_λ zwischen den Lösungen der Gleichung

$$\Box \xi_\lambda + K_\lambda^\nu \xi_\nu = 0$$

zu wählen ist. [Diese Gleichung haben wir schon früher aus der Bedingung (2.2) abgeleitet.] Es können demnach durch die ξ_α physikalisch unwesentliche Multipole eingeführt werden. Aber, ebenso wie vorher in Gleichung (1.9), sind die Multipole von Gleichung (2.19) von den physikalisch unwesentlichen Singularitäten unabhängig. Das folgt unmittelbar aus der

Struktur der von uns verwendeten virtuellen Ausfüllungen, die in Bezug auf infinitesimale Koordinatentransformationen invariant sind, durch welche die Felder (2.32), wie bekannt, erzeugt werden.

Es sei noch hervorgehoben, dass zwei verschiedene virtuelle Ausfüllungen, die aber denselben Anschluss an die Röhrenwände besitzen, zu gleichen Multipolstärken in der Gleichung (2.19) führen.

§ 3. *Die Bewegungsgleichungen eines Dipols*

Wird Gleichung (2.20) durch Dipolterme ergänzt, so hat man

$$\int_S \left[p_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + (\nabla_\lambda p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\alpha\beta} \right] ds = 0. \tag{3.1}$$

Diese Gleichung bildet, wie wir gleich sehen werden, ein in sich geschlossenes, lösbares Problem: man kann Gleichung (2.19) am Dipolterm abbrechen, ohne auf Widersprüche zu stossen. Es wird sich weiter zeigen, dass den rein deduktiv gewonnenen Resultaten eine zwingende, eindeutige Interpretation zukommt und dass physikalische Bestimmungsstücke eines materiellen *Systems*, z. B. das Rotationsmoment, in Begriffen des Gravitationsskeletts beschreibbar sind. Das Problem eines Systems in der Form eines Gravitationsskeletts anzusetzen bietet den Vorzug, dass man solchen äusserst schwierigen Fragen, wie Existenz von starren Körpern und Rotation (in einer RIEMANNschen Welt) aus dem Wege geht und sich sogleich einer Anzahl physikalisch bedeutsamer Parameter zuwendet.

Wir zerspalten $m^{\lambda\alpha\beta}$ nach u^λ, d. h., stellen es als eine Summe dar, deren erstes Glied ein zu u^α orthogonaler Tensor ist und deren übrige Glieder Produkte von u^α - Komponenten und von Komponenten zu u^α orthogonaler Tensoren sind (vgl. die Zerspaltung von $m^{\alpha\beta}$ im vorigen Paragraph). Die Zerspaltungskomponenten, die u^λ enthalten, können „wegintegriert" werden, sie sind durch partielle Integration (nach der Formel

$$\int_S u^\lambda \nabla_\lambda Q\, ds = \int_S \frac{dQ}{ds}\, ds = 0,$$

vorausgesetzt, dass der Skalar Q an den Enden des Integrationsweges verschwindet, was durch Vermittlung des ξ^α - Feldes geschieht) auf Einzelpolterme zurückführbar und daher in $m^{\alpha\beta}$ mit enthalten, z. B.:

$$\int_S \nabla_\lambda p_{\alpha\beta} u^\lambda A^{\alpha\beta} ds = - \int_S p_{\alpha\beta} (u^\lambda \nabla_\lambda A^{\alpha\beta})\, ds. \tag{3.2}$$

Wir setzen daher ($m^{\lambda\alpha\beta}$ ist in α, β symmetrisch):

$$m^{\lambda\alpha\beta} = {}^*m^{\lambda\alpha\beta} + n^{\alpha\lambda}u^{\beta} + n^{\beta\lambda}u^{\alpha} + n^{\lambda}u^{\alpha}u^{\beta}. \tag{3.3}$$

Die Tensoren ${}^*m^{\cdots}$, $n^{\cdot\cdot}$ (in allen Indizes) und der Vektor n^{λ} sind zu u^{λ} orthogonal; ${}^*m^{\lambda\alpha\beta}$ ist in α, β symmetrisch. Für zweite Ableitungen von ξ_{β} in zu u^{α} orthogonalen Richtungen, die unabhängig voneinander und von anderen ξ_{β}-Grössen wählbar sind, bekommt man zuerst für eine Summe

$$\frac{\partial^2 \xi_{\beta}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\alpha}}\left({}^*m^{\lambda\alpha\beta} + n^{\alpha\lambda}u^{\beta}\right) = 0, \tag{3.4}$$

dann für einzelne Glieder

$$\left(n^{\alpha\lambda} + n^{\lambda\alpha}\right)u^{\beta} + {}^*m^{\lambda\alpha\beta} + {}^*m^{\alpha\lambda\beta} = 0. \tag{3.5}$$

Multiplikation mit u_{β} ergibt

$$n^{\alpha\lambda} + n^{\lambda\alpha} = 0, \qquad \boxed{n^{\alpha\lambda} = -\,n^{\lambda\alpha}.} \tag{3.6}$$

Dann aber kann (3.4) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right){}^*m^{\lambda\alpha\beta} = 0.$$

In der Summe auf der linken Seite können die Faktoren von $m^{\lambda\alpha\beta}$ — nachdem im betrachteten (beliebigen) Punkte ein zu u^{α} orthogonales Raumkoordinatensystem und u^{α} als Zeitachse gewählt worden sind — beliebige in α, β symmetrische Werte annehmen. Daher

$${}^*m^{\lambda\alpha\beta} = 0. \tag{3.7}$$

Bevor wir unseres Problem deduktiv weiter verfolgen, wollen wir den physikalischen Sinn suchen, der den Bestimmungsstücken n^{λ} unseres Gravitationsskeletts zukommt. Der Untergrund sei euklidisch und auf ein orthogonales (LORENTZsches) Koordinatensystem bezogen. Es sei $T_{\alpha\beta}$ der in (2.13) vorkommende Tensor der materiellen Ausfüllung einer zeitartigen Weltröhre. Er wird die Rolle von $\mu_{\alpha\beta}$ [Gleichung (2.14)] übernehmen. Innerhalb der Weltröhre wählen wir eine glatte zeitartige Weltlinie und zerschneiden die Röhre in Elemente (Schichten), indem wir in Abständen ds dreidimensionale parallele Ebenen σ_3 konstruieren, die zur Weltlinie orthogonal sind. Wir haben in allen Punkten der Weltlinie

$$\left.\begin{array}{l} u^0 = 1, \qquad u^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3); \\ n^0 = 0 \text{ (wegen } n^{\lambda} u_{\lambda} = 0), \; n^{0i} = 0 \text{ (wegen } n^{\nu i} u_{\nu} = 0), \\ m^{i00} = n^i \text{ [wegen (3.2) und (3.7)].} \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

Lateinische Indizes nehmen die Werte 1, 2, 3 an.

Nun liefert ein Vergleich von (2.18) und (2.19):

$$\int\limits_{s}\left\{\int\limits_{\sigma_3}\frac{\partial p_{00}}{\partial x^i_0}\, y^i\, T^{00} dy^1 dy^2 dy^3\right\} ds = \int\limits_{s} m^{i00}\,\frac{\partial p_{00}}{\partial x^i}\, ds \tag{3.9}$$

(y sind Koordinaten relativ zum Schnittpunkt von σ_3 mit der Weltlinie). Daher

$$n^i = \int\limits_{\sigma_3} y^i\, T^{00} dy^1 dy^2 dy^3. \tag{3.10}$$

Es wird dabei die TAYLORentwicklung benutzt:

$$p_{\alpha\beta} = (p_{\alpha\beta})_0 + \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}_0} y^{\lambda} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 p_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}_0\, \partial x^{\mu}_0} y^{\lambda} y^{\mu} + \ldots \tag{3.11}$$

Wir wollen für $T_{\alpha\beta}$ den bekannten Tensor der inkohärenten Materie, $\mu u_{\alpha} u_{\beta}$, ansetzen. Für ruhende Massen, die mit der Dichte $T^{00} = \mu$ verteilt sind, ist n^i das statische Moment in Bezug auf die y^i - Achse. Zieht man die Weltlinie selbst (deren Spur den Koordinatenanfang $y^i = 0$ bestimmt) durch den Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) der Schnitte σ_3, so verschwinden die n^i. Ist die repräsentative Weltlinie gekrümmt, so werden die σ_3 - Schnitte nicht mehr parallel sein, das Element einer Schicht wird einen Faktor $f \neq 1$ bekommen. Die Koordinatensysteme $(y^1 y^2 y^3)$ sind dann *momentane* Raumachsen. T^{00} wird für Materie, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, Korrekturen erfahren. Wir sagen, dass die n^{λ} auch im allgemeinen Fall bewegter Materie und RIEMANNschen Untergrundes *im wesentlichen* statische Momente sind in momentanen Räumen, die die Weltlinie orthogonal schneiden. *Wir dürfen annehmen, dass die n^{λ} immer zum Verschwinden gebracht werden können,* und zwar durch Ausbesserung der repräsentativen Weltlinie des Systems, die dazu durch die „Schwerpunkte" der σ_3 - Schnitte gezogen werden soll.

Nun kehren wir zur mathematischen Behandlung unseres Problems zurück. Setzen wir zur Abkürzung für irgendwelche Tensoren $v^{\cdots}_{\cdots}$ mit oberen und unteren Indizes

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} v^{\cdots}_{\cdots} = \dot{v}^{\cdots}_{\cdots} \qquad (z.\ B.,\ \dot{n}^{\beta\lambda} = u^{\alpha} \nabla_{\alpha} n^{\beta\lambda}), \tag{3.12}$$

so ist, wenn man (1.5) und (3.6) berücksichtigt und von partiellen Integrationen nach der Art von (3.2) Gebrauch macht:

$$\int_S \nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi_\beta (n^{\alpha\lambda} u^\beta + n^{\beta\lambda} u^\alpha) \, ds = \frac{1}{2} \int_S \xi_\varepsilon K^\varepsilon_{\alpha\beta\lambda} (n^{\alpha\lambda} u^\beta + 2 n^{\beta\lambda} u^\alpha) \, ds -$$

$$- \int_S (\nabla_\lambda \xi_\beta) \, \dot{n}^{\beta\lambda} ds. \qquad (3.13)$$

Den antisymmetrischen Tensor $\dot{n}^{\beta\lambda}$ spalten wir nach u^λ; d. h., wir zerlegen ihn wie folgt (die Zerlegung ist eindeutig):

$$\dot{n}^{\beta\lambda} = {}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) + L^\beta u^\lambda - L^\lambda u^\beta, \qquad (3.14)$$

$${}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) u_\lambda = {}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) u_\beta = 0; \quad L^\beta u_\beta = 0.$$

Es ist dann

$$L^\beta = \dot{n}^{\beta\alpha} u_\alpha \qquad (3.15)$$

und für die Gesamtheit der Glieder in (3.1), die Differentialquotienten der ξ_α in zu u^α orthogonalen Richtungen enthalten [vgl. (2.21)]:

$$-\int_S \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\lambda} \left[{}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) - L^\lambda u^\beta - {}^*m^{\beta\lambda} - M^\lambda u^\beta \right] ds = 0. \qquad (3.16)$$

Wir wissen, dass daraus das Verschwinden des Klammerausdrucks folgt; es verschwindet somit sowohl der symmetrische Teil

$$\frac{1}{2} (L^\lambda u^\beta + L^\beta u^\lambda) + {}^*m^{\beta\lambda} + \frac{1}{2} (M^\lambda u^\beta + M^\beta u^\lambda) = 0, \qquad (3.17)$$

als auch der antisymmetrische. Multipliziert man (3.16) mit u^β, so erhält man

$$L^\lambda + M^\lambda = 0, \quad \text{woher } {}^*m^{\beta\lambda} = 0. \qquad (3.18)$$

Dann [aus dem Verschwinden des antisymmetrischen Teils des Klammerausdrucks von (3.17)] folgt

$${}^*(\dot{n})^{\beta\lambda} = 0, \qquad (3.19)$$

oder

$$\boxed{\dot{n}^{\beta\lambda} + \dot{n}^{\lambda\alpha} u_\alpha u^\beta - \dot{n}^{\beta\alpha} u_\alpha u^\lambda = 0.} \qquad (3.20)$$

Zu diesen Beziehungen kommen die folgenden, die man aus der Bedingung $n^{\beta\lambda} u_\lambda = 0$ erhält, hinzu:

$$\dot{n}^{\beta\lambda} u_\lambda + n^{\beta\lambda} \dot{u}_\lambda = 0. \tag{3.21}$$

Man kann die beiden Systeme durch das System

$$\boxed{\dot{n}^{\beta\lambda} - n^{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha u^\beta + n^{\beta\alpha} \dot{u}_\alpha u^\lambda = 0} \tag{3.22}$$

ersetzen, aus welchem man zuerst (3.21), dann (3.20) wiedergewinnen kann. $\nabla_\alpha \xi_\beta$ kommen noch nur in Gliedern vor, in welchen sie nach partieller Integration verschwinden:

$$\int_S \nabla_\lambda \xi_\beta \, (-L^\beta u^\lambda + M^\beta u^\lambda)\, ds = \int_S 2\, \xi_\beta \dot{L}^\beta ds. \tag{3.23}$$

[Wir haben von (3.18) Gebrauch gemacht.]

Gleichung (3.1) ergibt jetzt, wenn man die Glieder mit ξ_α zusammenfasst:

$$- \int \xi_\alpha \Big[u^\nu \nabla_\nu (M u^\alpha) - $$

$$- \frac{1}{2} K^\alpha_{\beta\mu\lambda} (n^{\mu\lambda} u^\beta + 2\, n^{\beta\lambda} u^\mu) - 2\dot{L}^\alpha \Big] ds = 0. \tag{3.24}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern muss verschwinden. Dann ist aber

$$\dot{M} u^\alpha + M \dot{u}^\alpha - \frac{1}{2} K^\alpha_{\beta\mu\lambda} (n^{\mu\lambda} u^\beta + 2 n^{\beta\lambda} u^\mu) - 2\dot{L}^\alpha = 0. \tag{3.25}$$

Nun ist, nach (3.15), (3.21) und (3.22),

$$\dot{L}^\alpha = - n^{\alpha\nu} \ddot{u}_\nu \,, \tag{3.26}$$

aber zugleich $\dot{L}^\alpha = \ddot{n}^{\alpha\nu} u_\nu$ und, da $\ddot{n}^{\alpha\nu}$ antisymmetrisch ist,

$$u_\alpha \dot{L}^\alpha = 0. \tag{3.27}$$

$K^\alpha_{\beta\mu\lambda} u_\alpha u^\mu$ ist in β, λ symmetrisch, wie man leicht einsieht. Daher ist

$$K^\alpha_{\beta\mu\lambda} n^{\beta\lambda} u_\alpha u^\mu = 0,$$

wegen (3.6). Multipliziert man Gleichung (3.25) mit u^α, so erhält man

$$\dot{M} = 0, \qquad \text{also} \qquad \boxed{M = const.} \tag{3.28}$$

Für den antisymmetrischen Tensor $n^{\beta\lambda}$ können wir schreiben

$$2\,K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda}n^{\beta\lambda} = \left(K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} - K^{\alpha}_{\lambda\mu\beta}\right) n^{\beta\lambda} = K^{\alpha}_{\mu\beta\lambda}n^{\beta\lambda}.$$

Berücksichtigen wir noch (3.26), so haben wir, anstatt (3.25),

$$\boxed{\begin{aligned} M\dot{u}^{\alpha} - K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda}u^{\beta}n^{\mu\lambda} + 2n^{\alpha\lambda}\ddot{u}_{\lambda} &= 0. \\ M &= const. \end{aligned}} \tag{3.29}$$

[Wir erinnern, dass, nach (3.12),

$$\dot{u}^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds} + \left\{ {\lambda\,\mu \atop \alpha} \right\} u^{\lambda}u^{\mu}$$

ist.] *Das Glied, das $\ddot{u}^{\lambda}$ enthält, wird auch im Falle euklidischen Untergrundes vorkommen.*

So führt Gleichung (3.1) zu den Bewegungsgesetzen (3.6), (3.22) und (3.29). Es ist klar, dass, zusammen mit unseren vermittelnden Feststellungen über die Tensorkomponenten des Pols und des Dipols [wie z. B. (3.18)], unsere Bewegungsgesetze hinreichende Bedingungen für das Bestehen von (3.1) darstellen.

Für die 6 Funktionen $n^{\alpha\beta}$ und die 4 Funktionen u^{α} haben wir die 6 Gleichungen (3.22) und die 4 Gleichungen (3.29). Dass für unsere 10 Funktionen die Beziehungen

$$n^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0, \quad u^{\alpha}u_{\alpha} = 1 \tag{3.30}$$

gelten, kann man aus den Gleichungen ablesen. Man kann (3.30) dazu benutzen, die 10 Funktionen auf $3 + 3 = 6$ zurückzuführen.

Die Kraft

$$D^{\alpha} = K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda}\,u^{\beta}\,n^{\mu\lambda} + 2n^{\alpha\lambda}\,\ddot{u}_{\lambda} \tag{3.31}$$

ist zu u^{α} orthogonal; dasselbe gilt sogar für jeden der 2 Summanden auf der rechten Seite von (3.31).

§ 4. *Dipol und Rotation; Präzession*

Die Dipolstärken $n^{\alpha\beta}$ lassen sich nach derselben Methode interpretieren, die uns im vorigen Paragraph zum Verständnis der n^{α}-Grössen verholfen hat. Die repräsentative Weltlinie des Systems sei wiederum, in unseren LORENTZschen Koordinaten, zur Zeitachse parallel. Die Materie

soll relativ zum Raumkoordinatensystem, in welchem der Schwerpunkt momentan ruht, langsame Bewegungen ausführen. Indem wir Quadrate der Geschwindigkeiten vernachlässigen, haben wir

$$T^{k0} = \left(\frac{\mu\, v^k}{1-v^2}\right) \overset{\infty}{=} \mu v^k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

[v^k sind die Raumkomponenten des Geschwindigkeitsfeldes der Materie relativ zum Schwerpunkt (Lichtgeschwindigkeit = 1)]. Wir haben weiter, nach der Zerlegung (3.3), in welcher u^α selbstverständlich sich auf die repräsentative Weltlinie beziehen ($u^0 = 1$, $u^k = 0$):

$$m^{lk0} = n^{kl} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3).$$

Der Gleichung (3.9) wird jetzt folgende Gleichung entsprechen:

$$\int_S \left\{ \int_{\sigma_3} \frac{\partial\, p_{k0}}{\partial x_0^l}\; y^l\, T^{k0} dy^1 dy^2 dy^3 \right\} ds = \int_S \frac{\partial\, p_{k0}}{\partial x_0^l} m^{lk0} ds,$$

woher

$$n^{kl} = \int_{\sigma_3} \mu y^l\, v^k dy^1 dy^2 dy^3 . \qquad (4.1)$$

n^{lk} ist antisymmetrisch, daher

$$n^{lk} = \frac{1}{2} \int_{\sigma_3} \mu\, (v^l\, y^k - v^k y^l)\; dy^1 dy^2 dy^3,$$

oder

$$\boxed{n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \Omega^{\alpha\beta},} \qquad (4.2)$$

wobei $\Omega^{\alpha\beta}$ der Drehimpuls ist. $n^{\alpha\beta}$ sind *im wesentlichen* die Komponenten des Drehimpulses, wenn man ihn in Bezug auf einen Punkt der Schwerpunktsweltlinie für einen zur Weltlinie orthogonalen σ_3-Schnitt berechnet.

Wenn es gestattet ist, unser System als einen *starren Körper* zu behandeln, so ist

$$v^l = v^l_{\ r}\, y^r \qquad (i,\ r = 1, 2, 3), \qquad (4.3)$$

wobei v_{lr} der antisymmetrische Tensor der Rotationsgeschwindigkeit ist [in orthogonalen Systemen gleichen Schraubsinns ist er durch einen Vektor ω^l darstellbar:

$$(v_{12},\ v_{23},\ v_{31}) = (-\,\omega_x\, ,\, -\,\omega_y\, ,\, -\,\omega_z\,)].$$

Dann ist

$$n^{ik} = v^{i}_{\ r} I^{kr} \tag{4.4}$$

mit

$$I^{kr} = \int \mu y^k y^r \, dy^1 dy^2 dy^3. \tag{4.5}$$

Ist das Trägheitsellipsoid des Körpers eine *Kugel,* so haben wir in einem kartesischen Koordinatensystem

$$I^{kr} = I\,\delta^{kr} = \begin{cases} I & (k = r) \\ 0 & (k \neq r) \end{cases} \tag{4.6}$$

und dementsprechend in einem nichtorthogonalen linearen System

$$n^{ik} = I v^{ik} \tag{4.7}$$

In diesem einfachen Fall ist die rechte Seite von (4.4) antisymmetrisch und unser Dipolmodell ist dem mechanischen Problem adäquat. Im allgemeinen Rotationsfall muss man, wie wir weiter sehen werden, als Erweiterung des Gravitationsmodells den Quadrupol einführen. Zwischen dem skalaren Wert Ω des Drehimpulses und dem Drehimpulstensor $\Omega^{\alpha\beta}$ besteht die Beziehung

$$\Omega^{\alpha\beta} = \Omega q^{\alpha\beta}, \qquad \text{wobei } q^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} = 1. \tag{4.8}$$

Aus der Gleichung (3.22) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} u^{\alpha} \nabla_{\alpha} (n^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}) = \Omega \dot{\Omega} = 0, \qquad \boxed{\Omega = const.} \tag{4.9}$$

Ist Ω als Produkt von Trägheitsmoment I und Winkelgeschwindigkeit ω darstellbar und ist $I = const.$, so ist $\omega = const.$

Gelegentlich sei darauf hingewiesen, dass die Berechnung der Dipolstärken $n^{\alpha\beta}$ der angenäherten Berechnung der Dipolglieder des Potentials $\psi^{\alpha\beta}$ parallel läuft. Es ist nämlich $\psi^{\alpha\beta}$, wenn man Gravitationstheorie auf euklidischem Untergrunde treibt, in einem Weltpunkte 0 durch ein retardiertes Potential gegeben [vgl. Gleichung (2.11)] das, bis auf einen konstanten Faktor,

$$\int \left(\frac{T^{0i}}{r}\right)_{t - \frac{r}{c}} dy^1 dy^2 dy^3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

beträgt in einem Koordinatensystem, in welchem der nach 0 gerade zustrahlende Punkt der Weltlinie momentan ruht. Indem man für $\frac{1}{r}$ die ersten 2 Glieder seiner TAYLORentwicklung nimmt und die Integration

über den Lichtkegel durch Integration über einen zur Weltlinie orthogonalen Schnitt ersetzt, bekommt man (4.1) für die Komponenten der Dipolstärke.

Im Gravitationsskelett des rotierenden Körpers kommt der Drehimpulstensor gegenüber der Rotationsachse, die von der Grösse $\Omega^{\alpha\beta}$ aus konstruiert wird, als das Primäre vor. Man muss dabei an (4.3) anknüpfen. Die Rotationsachse eines symmetrischen Kreisels ist zum Drehimpulstensor orthogonal. Für die *Rotationsachse* c^α setzen wir daher:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha)\ c_\alpha n^{\alpha\beta} = 0, \\ &(\beta)\ c_\alpha u^\alpha = 0, \\ &(\gamma)\ c_\alpha c^\alpha = -1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Differentiation ergibt

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha)\ \dot{c}_\alpha n^{\alpha\beta} = -\, c_\alpha \dot{n}^{\alpha\beta} = 0, \ \text{nach (3.22) und (4.10)}, \\ &(\beta)\ \dot{c}_\alpha u^\alpha = -\, c_\alpha \dot{u}^\alpha\,. \\ &(\gamma)\ \dot{c}_\alpha c^\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

$\dot{c}^\alpha$ ist demnach zu drei unabhängigen Raumrichtungen orthogonal: zum Flächenelement $n^{\alpha\beta}$ und zu c^α; es ist zeitartig und durch

$$\boxed{\dot{c}^\alpha = -\,(c_\nu \dot{u}^\nu)u^\alpha} \qquad (4.12)$$

gegeben; $\dot{u}^\alpha$ ist aus (3.29) zu entnehmen. *Bewegung des Schwerpunkts und Übertragung der Rotationsachse sind gekoppelt.*

Das Gesetz (4.12) ist mit der FOKKERschen Präzessionsregel unvereinbar. Es fehlt nämlich bei FOKKER der Einfluss der zweiten Ableitungen der $g_{\alpha\beta}$ (des Krümmungstensors: dieser Einfluss kann, wenigstens theoretisch, durch Verminderung des Rotationsmoments beliebig herabgesetzt werden). Das ist ja selbsverständlich: die FOKKERsche Vorschrift ist in der Voraussetzung konstruiert, dass das Beharrungsgesetz für die Achse *lokal euklidisch* ist, d. h., im Vergleich mit dem euklidischen Gesetz Zusätze erfährt, die in einem geodätischen Koordinatensystem im bezüglichen Punkte verschwinden. Andererseits kommt bei FOKKER* zwischen der Achsenübertragung und der nichtgeodätischen Bewegung des Schwerpunkts in einer krümmungslosen Welt eine Kopplung vor, die mit der durch (4.12) gegebenen gleich-

---

* Bei sinngemässer Erweiterung seines für eine geodätische Linie formulierten Ansatzes.

bedeutend ist, wie wir gleich sehen werden. (Dass die eventuellen Kräfte die Bewegung des Schwerpunkts allein beeinflussen, sei vorausgesetzt.) Man beachte dabei folgendes. Unter den Gleichungen (4.12) ist nur Gleichung (α) dynamischen Inhalts; sie beruht nämlich auf der Gleichung (3.19), die besagt, dass der zu u^α orthogonale Bestandteil des Rotations*moments* während der Bewegung konstant bleibt (oder, allgemeiner, parallele Verpflanzung erfährt). In völlig analoger Weise besagt die Regel FOKKERs, dass der zu u^α orthogonale Bestandteil der Rotations*achse* Parallelverschiebung erfährt.

Ist d^α ein Vektor, der in einem Punkt der Bahn mit der Rotationsachse c^α zusammenfällt, so ist c^α im benachbarten Punkt, nach FOKKER, ein zur orthogonalen Komponente $*d^\alpha$ proportionaler Vektor:

$$c^\alpha = \beta {*d^\alpha}, \quad {*d^\alpha} = d^\alpha - (d_\nu u^\nu)\, u^\alpha \quad . \tag{4.13}$$

d^α wird dabei längs der Weltlinie des Schwerpunkts parallel verschoben: $\dot{d}^\alpha = 0$. Den Faktor β führen wir ein, damit c^α auf Einheitslänge normiert werden kann. Wir finden

$$\dot{c}^\alpha = \beta {*\dot{d}^\alpha} + \dot{\beta} {*d^\alpha} =$$

$$= -\beta \left[(d_\nu \dot{u}^\nu)\, u^\alpha + (d_\nu u^\nu) \dot{u}^\alpha \right] + \frac{\dot{\beta}}{\beta} c^\alpha$$

$$\left[({*\dot{d}^\alpha}) = u^\nu \nabla_\nu {*d^\alpha} \right].$$

Nun ist es leicht anzusehen, dass, wegen $d^\alpha = c^\alpha$, in unserem Anfangspunkt,

$$\beta = \frac{1}{1 + (d^\alpha u_\alpha)^2} = 1,$$

$$\dot{\beta} = 0$$

zu setzen ist. Dann stimmt das FOKKERsche $\dot{c}^\alpha$ mit unserem $\dot{c}^\alpha$ [Formel (4.12)] überein.

§ 5. *Der Quadrupol*

Berücksichtigt man das Quadrupolglied im Gravitationsskelett, so ist die Variationsgleichung des Problems:

$$\int_S \left[p_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + (\nabla_\lambda p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\alpha\beta} + (\nabla_\lambda \nabla_\mu p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\mu\alpha\beta} \right] ds = 0. \tag{5.1}$$

Das erweiterte Gravitationsskelett befreit uns von den Beschränkungen, die an die Voraussetzung (3.6) gebunden sind, dass $n^{\alpha\beta}$ antisymmetrisch ist [vgl. oben das gelegentlich der Gleichung (4.7) Gesagte].

$m^{\lambda\mu\alpha\beta}$ ist selbstverständlich in α, β symmetrisch; es kann als in λ, μ symmetrisch angesetzt werden; der antisymmetrische Teil (Indizes in eckigen Klammern) würde nur einen Beitrag

$$(\nabla_\lambda \nabla_\mu p_{\alpha\beta}) m^{[\lambda\mu]\alpha\beta} = (\nabla_{[\lambda} \nabla_{\mu]} p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\mu\alpha\beta} = p_{\varepsilon\beta}\, Q^{\varepsilon\beta}$$

zum Pol liefern mit

$$Q^{\varepsilon\beta} = \frac{1}{2}(K^{\varepsilon}_{\alpha\mu\lambda} m^{[\lambda\mu]\alpha\beta} + K^{\varepsilon}_{\nu\mu\lambda} m^{[\lambda\mu]\beta\nu}) = K^{\varepsilon}_{\alpha\mu\lambda} m^{[\lambda\mu]\alpha\beta}.$$

Spalten wir nach u^α:

$$m^{\lambda\mu\alpha\beta} = {}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} + (b^{\lambda\mu\alpha} u^\beta + b^{\lambda\mu\beta} u^\alpha) + b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta + \ldots \tag{5.2}$$

(${}^*m^{\cdots\cdot}$ und $b^{\cdots}$ sind in allen Indizes zu u^α orthogonal), so haben wir, analog zu (3.4),

$$\int\limits_S \frac{\partial^3 \xi_\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\mu \partial x^\alpha} ({}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} + b^{(\lambda\mu\alpha)} u^\beta)\, ds = 0,$$

woher

$${}^*m^{(\lambda\mu\alpha)\beta} + b^{(\lambda\mu\alpha)} u^\beta = 0. \tag{5.3}$$

(Runde Klammern bedeuten eine symmetrische Summe:

$$a^{(\lambda\mu\nu)} = \frac{1}{3!} \sum a^{\lambda\mu\nu}$$

über alle Permutationen summiert.)

Multiplikation mit u_β liefert

$$b^{(\lambda\mu\alpha)} = 0. \tag{5.4}$$

Dann aber kann (5.3) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} \right) {}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} = 0.$$

Die Schlussweise, die uns zu (3.7) geführt hat, ist auch im vorliegenden Fall anwendbar, und wir erhalten

$${}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} = 0. \tag{5.5}$$

In der Zerspaltung (5.2) können wir Glieder, die u^λ oder u^μ enthalten, ausser Acht lassen, da sie, wie man leicht einsieht, auf Dipole und Pole zurückführbar sind. Auf Glieder, die $b^{\cdots}$ mit 3 Indizes enthalten, werden wir verzichten, da wir nur solche Bestimmungsstücke des mechanischen Systems einführen wollen, die klassische Gegenstücke besitzen (d. h., als *im wesentlichen* bekannte Grössen der Mechanik der Punktsysteme gedeutet werden können). Die nichtklassischen Grössen, die den $b^{\cdots}$ zuzuordnen sind, sind die Momente zweiten Grades des Geschwindigkeitsfeldes:

$$b^{rkl} = \frac{1}{2}\int \mu y^r y^k v^l \, dy^1 dy^2 dy^3. \tag{5.6}$$

Das Deutungsverfahren läuft demjenigen, das zu (4.1) führt, völlig parallel.

So bleibt uns nur die Voraussetzung übrig, dass in der Gleichung (5.1) der Quadrupol durch das Glied $b^{\lambda\mu}u^\alpha u^\beta$ vorkommt:

$$m^{\lambda\mu\alpha\beta} = b^{\lambda\mu}u^\alpha u^\beta. \tag{5.7}$$

Das ergibt, wie wir sehen werden, ein in sich geschlossenes, widerspruchsfreies System von mechanischen Bestimmungsstücken des materiellen Systems.

Durch elementare Umformungen, bei welchen wir von Vertauschungsrelationen für kovariante Ableitungen [Formeln (1.5) und (2.7)] wiederholten Gebrauch machen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & b^{\beta\mu}u^\alpha u^\beta \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha \xi_\beta = \\ & = -(\nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\beta)\, u^\alpha \nabla_\alpha (b^{\lambda\mu} u^\beta) + K^\varepsilon_{\beta\alpha\mu,\lambda}\, \xi_\varepsilon b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta + \\ & + \nabla_\varepsilon \xi_\beta (K^\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\, b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta + 2K^\beta_{\nu\alpha\lambda}\, b^{\lambda\varepsilon} u^\nu u^\alpha)\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

[Ein für uns unwesentliches Glied $u^\alpha \nabla_\alpha (\ldots)$ lassen wir einfach fort.] Wir benutzen dabei die Bezeichnung

$$K^\varepsilon_{\beta\alpha\mu,\lambda} = \nabla_\lambda K^\varepsilon_{\beta\alpha\mu}\,. \tag{5.9}$$

Obwohl in (5.8) dritte Ableitungen der ξ_α nicht vorkommen, kann das Quadrupolglied auf Glieder niederer Polarität *nicht* zurückgeführt werden. Das Glied, das zweite Ableitungen von ξ_α enthält, ist nicht von der Gestalt $(\nabla_\lambda\, p_{\alpha\beta}) q^{\alpha\beta}$.

Wir spalten $\dot{b}^{\beta\mu}$ nach u^α:

$$\dot{b}^{\lambda\mu} = *(\dot{b}^{\lambda\mu}) + Z^{\lambda}u^{\mu} + Z^{\mu}u^{\lambda} + Zu^{\lambda}u^{\mu} . \tag{5.10}$$

Es ist leicht zu sehen, dass man dem $b^{\lambda\mu}$-Glied, insofern es sich um zweite Ableitungen der ξ_α handelt, dadurch Rechnung trägt, dass man in Gleichung (3.4)

$$M^{\lambda\alpha\beta} = *m^{\lambda\alpha\beta} - b^{\lambda\alpha}\dot{u}^{\beta} \tag{5.11}$$

anstatt $*m^{\lambda\alpha\beta}$ und

$$N^{\alpha\lambda} = n^{\alpha\lambda} - *(\dot{b}^{\alpha\lambda}) \tag{5.12}$$

anstatt $n^{\alpha\lambda}$ einführt. So erhält man, anstatt (3.6),

$$N^{\alpha\lambda} \equiv n^{\alpha\lambda} - *(\dot{b}^{\alpha\lambda}) = - N^{\lambda\alpha} \tag{5.13}$$

Wir wollen nun versuchen, (5.13) physikalisch zu deuten. Die uns geläufige Deutung ergibt *im wesentlichen* die Stärke des Quadrupolglieds in der Entwicklung eines NEWTONschen Potentials nach Multipolen:

$$b^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \sum \mu y^{\lambda} y^{\mu} . \tag{5.14}$$

Wir haben das Integral durch eine Summe ersetzt; μ ist jetzt die Masse eines individuellen Materieelements, y^α seine Koordinaten relativ zum Schwerpunkt in seiner *gleichzeitigen* Lage ($y^\alpha u_\alpha = 0$). Der Vektor

$$\frac{dy^\alpha}{ds} = v^\alpha$$

ist *im wesentlichen* die Geschwindigkeit relativ zum Schwerpunkt und zu u^α orthogonal. $*(\dot{b}^{\alpha\lambda})$ kann *im wesentlichen* mit $\dot{b}^{\alpha\lambda}$ identifiziert werden, und wir erhalten für $N^{\alpha\lambda}$, nach (5.14) und (4.1):

$$N^{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \sum \mu \, (v^{\alpha} y^{\lambda} - v^{\lambda} y^{\alpha}) = \frac{1}{2} \, \Omega^{\alpha\lambda} ; \tag{5.15}$$

es ist tätsächlich antisymmetrisch, ohne dass man die Allgemeinheit des Systems einschränkt [vgl. das gelegentlich der Formel (4.7) Gesagte]; es ist gleich dem halben in Bezug auf den Schwerpunkt gebildeten Drehimpulstensor. Weiter folgt aus (5.13), dass *im wesentlichen*

$$n^{\alpha\lambda} - n^{\lambda\alpha} \equiv 2n^{[\alpha\lambda]} = \Omega^{\alpha\lambda} \tag{5.16}$$

ist.

Der Gleichung (3.6) entspricht jetzt, wegen (5.13), die Gleichung

$$M^{\lambda\alpha\beta} + M^{\alpha\lambda\beta} = 0;$$

wegen (5.11) folgt aus ihr

$$\frac{1}{2}\,{}^*m^{\lambda\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,{}^*m^{\alpha\lambda\beta} - b^{\lambda\alpha}\dot{u}^{\beta} = 0,$$

woher, da ${}^*m^{\lambda[\alpha\beta]} = 0$ ist,

$$\frac{1}{2}\,{}^*m^{[\alpha\beta]\lambda} = b^{\lambda[\alpha}\dot{u}^{\beta]}.$$

Das Glied von (5.8), das die ξ_β zweimal differentiiert enthält, ist $-(\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi_\beta)\,\dot{b}^{\lambda\alpha}u^{\beta}$. Seine aus der Spaltung (5.11) entspringenden Bestandteile

$$-(\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi_\beta)\,Z^{\lambda}u^{\alpha}u^{\beta},\ -(\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi_\beta)\,Zu^{\lambda}u^{\alpha}u^{\beta}$$

gehören wegen des symmetrischen Faktors $u^\alpha u^\beta$: der erste zum n^λ-Dipolglied, der zweite (nach partieller Integration) zum Polglied. Es bleibt somit

$$-(\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi_\beta)\,Z^{\alpha}u^{\lambda}u^{\beta} =$$

$$= -(2\nabla_{[\lambda}\nabla_{\alpha]}\xi_\beta)\,Z^{\alpha}u^{\lambda}u^{\beta} - (\nabla_\alpha\nabla_\lambda\xi_\beta)\,Z^{\alpha}u^{\lambda}u^{\beta} = \qquad (5.17)$$

$$= -\xi_\varepsilon K^{\varepsilon}_{\beta\alpha\lambda}Z^{\alpha}u^{\lambda}u^{\beta} + \text{ein } n^{\alpha}\text{-Dipolglied.}$$

Glieder niederer Polarität, die aus den $b^{\lambda\mu}$-Gliedern entspringen, betrachten wir selbstverständlich als in den Dipol- und Polgliedern mit einbegriffen.

Wir wollen noch das Glied $(\nabla_\varepsilon\xi_\beta)\,K^{\varepsilon}_{\mu\alpha\lambda}b^{\lambda\mu}u^{\alpha}u^{\beta}$ von (5.8) umformen. Wir spalten nach der Formel:

$$K^{\varepsilon}_{\mu\alpha\lambda}b^{\lambda\mu}u^{\alpha} = \rho^{\varepsilon} + \rho u^{\varepsilon} \qquad (\rho_\alpha u^\alpha = 0). \qquad (5.18)$$

Der Koeffizient von $\nabla_\varepsilon\xi_\beta$ in (5.8) ist dann

$$\rho u^{\varepsilon}u^{\beta} + \rho^{\varepsilon}u^{\beta} + \rho^{\varepsilon\beta} \qquad (\rho^{\varepsilon\beta}u_\varepsilon = \rho^{\varepsilon\beta}u_\beta = 0)$$

mit

$$\rho^{\varepsilon\beta} = 2\,K^{\beta}_{\nu\alpha\lambda}b^{\lambda\varepsilon}u^{\nu}u^{\alpha}. \qquad (5.19)$$

$\rho u^{\varepsilon} u^{\beta}$ ergibt einen einfachen Pol. Da $n^{\beta\lambda}$, wie man aus (5.13) sieht, nicht mehr antisymmetrisch ist, spalten wir $\dot{n}^{\beta\lambda}$ nach der Formel

$$\dot{n}^{\beta\lambda} = {}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) + L^{\beta} u^{\lambda} - L'^{\lambda} u^{\beta} + L u^{\beta} u^{\lambda}, \qquad (5.20)$$

anstatt nach (3.14). Es ist

$$L = \dot{n}^{\beta\lambda} u_{\beta}\, u_{\lambda},$$

$$\dot{n}^{\beta\lambda} u_{\lambda} = L^{\beta} + L u^{\beta},$$

$$\dot{n}^{\beta\lambda} u_{\beta} = - L'^{\lambda} + L u^{\lambda},$$

$$L^{\beta} + L'^{\beta} = \dot{n}^{\beta\lambda} u_{\lambda} - \dot{n}^{\beta\lambda} u_{\beta} = 2\dot{n}^{[\beta\lambda]} u_{\lambda} = \dot{\Omega}^{\beta\lambda} u_{\lambda} = - \Omega^{\beta\lambda} \dot{u}_{\lambda}. \qquad (5.21)$$

Das Glied $L u^{\beta} u^{\lambda}$ in (5.20) rechnen wir zum Polglied mit. Anstatt (3.13) haben wir jetzt

$$\int_S \nabla_{\lambda} \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} (N^{\alpha\lambda} u^{\beta} + n^{\beta\lambda} u^{\alpha})\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \xi_{\varepsilon} K^{\varepsilon}_{\ \beta\alpha\lambda} (N^{\alpha\lambda} u^{\beta} + 2 n^{\beta\lambda} u^{\alpha}) ds -$$

$$- \int_S (\nabla_{\lambda} \xi_{\beta}) \left[{}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) + L^{\beta} u^{\lambda} - L'^{\lambda} u^{\beta} \right] ds.$$

Gleichung (3.16) ist durch

$$\frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \left[{}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) - \rho^{\lambda\beta} - (L'^{\lambda} + M^{\lambda} + \rho^{\lambda}) u^{\beta} - {}^*m^{\beta\lambda} \right] = 0$$

zu ersetzen, und es folgen aus ihr die Gleichungen

$$L'^{\lambda} + M^{\lambda} + \rho^{\lambda} = 0, \qquad (5.22)$$

$${}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) - \rho^{\lambda\beta} - {}^*m^{\beta\lambda} = 0. \qquad (5.23)$$

Da (5. 22) an die Stelle von (3.18) kommt, werden wir jetzt

$$\int_S \nabla_{\lambda} \xi_{\beta} (- L^{\beta} u^{\lambda} + M^{\beta} u^{\lambda})\, ds = \int_S \xi_{\beta} (\dot{L}^{\beta} + \dot{L}'^{\beta} + \dot{\rho}^{\beta}) ds \qquad (5.24)$$

anstatt (3.23) haben. Das $b^{\lambda\mu}$ - Glied liefert unter dem Integrationszeichen, alles in allem genommen, folgenden Ausdruck mit dem Faktor ξ_β :

$$\xi_\beta \, (K^{\beta}_{\nu\alpha\mu,\,\lambda} b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\nu + \dot{\rho}^\beta - K^{\beta}_{\nu\alpha\lambda} Z^\alpha u^\lambda u^\nu). \tag{5.25}$$

Das Glied mit Z^α stammt aus (5.17). Man erhält aus (5.10)

$$Z^\alpha = \dot{\mathring{b}}^{\varepsilon\alpha} u_\varepsilon - \dot{b}^{\varepsilon\nu} u_\varepsilon u_\nu u^\alpha$$

und aus (5.18)

$$\rho^\lambda = K^{\beta}_{\mu\alpha\lambda} b^{\lambda\mu} u^\alpha - u^\beta K^{\nu}_{\mu\alpha\lambda} b^{\lambda\mu} u_\nu u^\alpha .$$

Gleichung (3.23) wird ein Zusatzglied erhalten, das (5.25) entspricht. Durch Nullsetzen der Koeffizienten von ξ_α erhalten wir die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes:

$$u^\nu \nabla_\nu (M u^\alpha) + p^\alpha = 0. \tag{5.26}$$

Den Ausdruck für p^α wollen wir nur für den einfachen Fall verschwindender Krümmung K.... angeben. Nach (5.24) und (5.21) ist dann

$$p^\alpha = \Omega^{\alpha\lambda} \ddot{u}^\lambda + \dot{\Omega}^{\alpha\lambda} \dot{u}_\lambda. \tag{5.27}$$

Gleichung (5.23) ergibt, indem man ihren antisymmetrischen Bestandteil abspaltet:

$$*(\dot{n}^{[\beta\lambda]}) - \rho^{[\lambda\beta]} = 0. \tag{5.28}$$

Nun ist [vgl. (3.14) und (3.15)]

$$*(\dot{n}^{[\beta\lambda]}) = \dot{n}^{[\beta\lambda]} + \dot{n}^{[\beta\alpha]} u_\alpha u^\lambda - \dot{n}^{[\lambda\alpha]} u_\alpha u^\beta .$$

Es ist also, wenn man (5.19) benutzt und $\frac{1}{2}\,\Omega^{\beta\lambda}$ anstatt $n^{[\beta\lambda]}$ schreibt [vgl. (4.2), wo $n^{\alpha\beta}$ als antisymmetrisch vorausgesetzt wird, und (3.21)]:

$$\boxed{\frac{1}{2}\,(\dot{\Omega}^{\beta\lambda} - \Omega^{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha u^\beta + \Omega^{\beta\alpha} \dot{u}_\alpha u^\lambda) = (K^{\beta}_{\nu\alpha\varepsilon} b^{\varepsilon\lambda} - K^{\lambda}_{\nu\alpha\varepsilon} b^{\varepsilon\beta}) u^\nu u^\alpha .} \tag{5.29}$$

$\frac{1}{2}\,\Omega^{\beta\lambda}$ wurde einfach anstatt $n^{[\beta\lambda]}$ gesetzt. Wir wissen, dass $\Omega^{\beta\lambda}$ *im wesentlichen* der Drehimpuls ist. Ist $b^{\varepsilon\lambda}$ von der Gestalt

$$A(u^{\varepsilon}u^{\lambda} - g^{\varepsilon\lambda})$$

(Trägheits*kugel)*, so verschwindet die rechte Seite von (5.29), die, wie wir gleich sehen werden, *im wesentlichen* die klassische Präzession wiedergibt.

Probe auf klassische Verhältnisse. Will man den Grenzübergang $c = \infty$ durchführen, so soll man in (5.29):

$$u^0 = 1, \quad u^i = 0, \quad \dot{u}^{\alpha} = 0, \quad b^{0\alpha} = 0 \quad (\text{wegen } b^{\nu\alpha}u_{\nu} = 0)$$

setzen. So erhalten wir Gleichung (5.29) in ihrer nichtrelativistischer Gestalt:

$$K^i_{0\,0s}\, b^{sk} - K^k_{00s}\, b^{si} = \frac{1}{2}\frac{d\,\Omega^{ik}}{d\,t} \tag{5.30}$$

(lateinische Indizes laufen, wie immer, die Werte 1, 2, 3 durch; der Index 0 entspricht der Zeit: $x^0 = t$). Für den Krümmungstensor nehmen wir die genäherte Formel (2.1) an, indem wir $K_{....}$ als schwaches Feld auf euklidischem Untergrunde ansehen. Dann haben wir für das *statische* zentralsymmetrische Feld:

$$K_{i00s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\,\partial x^s} = -\,m\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i\,\partial x^s}\,;\; K^i_{00s} = -K_{i00s}\,.$$

(Es wurde $g^{00} = 1 - \dfrac{2\,m}{r}$ angenommen). Die NEWTONsche Kraft ist

$$X^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{k\,m_0}{r}\,,$$

das Moment, bezogen auf den Schwerpunkt:

$$X^{ik} = \sum \mu\,(X^i y^k - X^k y^i)\,.$$

Es ist $m = \dfrac{k m_0}{c^2}$, m_0 Masse des Zentralkörpers in *gr*, k die gewöhnliche Gravitationskonstante. Da für den Schwerpunkt

$$\sum \mu y^i = 0$$

ist, haben wir, bis auf höhere Glieder der TAYLORentwicklung von X^i [vgl. (5.14)]:

$$X^{ik} = 2km_0 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i \, \partial x^s} b^{sk} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^k \, \partial x^s} b^{si} \right),$$

und (5.30) ist nichts anderes, als der klassische Satz von der Zeitableitung des Drehimpulses:

$$\frac{d\Omega^{ik}}{dt} = X^{ik}.$$

[Wir haben die rechte Seite von (5.30) durch c^2 geteilt, da wir *sec* als Zeitenheit einführen.]

§ 6. Wichtige Sonderfälle. Die Energiegleichung. Spezielle Relativitätstheorie

Bildet die Metrik $ds^2 = (dx^0)^2 - \Sigma (dx^i)^2$ den Untergrund, so ist in den Gleichungen (5.29) die rechte Seite gleich Null zu setzen. Dann aber verschwindet das zweite Glied rechts in (5.27), und wir haben folgende Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes:

$$M\dot{u}^\alpha + \Omega^{\alpha\nu}\ddot{u}_\nu = P^\alpha \qquad (M = const.). \tag{6.1}$$

P^α führen wir als eine äussere Kraft ein. Für den Drehimpuls $\Omega^{\lambda\mu}$ haben wir die Gleichungen

$$\dot{\Omega}^{\beta\lambda} - \Omega^{\lambda\alpha}\dot{u}_\alpha u^\beta + \Omega^{\beta\lambda}\dot{u}_\alpha u^\lambda = 0. \tag{6.2}$$

Von der Kraft P^α setzen wir voraus, dass sie zu u^α orthogonal ist:

$$P^\alpha u_\alpha = 0. \tag{6.3}$$

Diese Bedingung folgt mit Notwendigkeit aus (6.2). Im Falle eines Körpers, dessen Gravitationsskelett von einem einfachen Pol besteht, gelangt man zum Gleichungsystem

$$\frac{d(Mu^\alpha)}{ds} = P^\alpha \qquad (P^\alpha u_\alpha = 0),$$

in welchem P^α aus der Wirkung des elektromagnetischen Feldes anderer Körper und der Rückwirkung der Strahlung besteht (der Körper ist geladen wie ein einfacher elektrischer Pol). Setzt man voraus, dass der Gravitationsdipol und -quadrupol in den elektromagnetischen Kraftwirkungen keine Änderungen hervorbringen, so erkennt man, dass die Gleichung

$$\frac{d(Mu^\alpha)}{ds} + \Omega^{\alpha\nu}\ddot{u}_\nu = P^\alpha$$

bestehen muss, wenn Gravitationsmultipol und elektromagnetische Wirkungen nebeneinander existieren. Aus der letzten Gleichung folgt $M = const.$ und Gleichung (6.1). Wir setzen voraus, dass die Ladung keine Präzessionswirkungen hervorruft, so dass (6.2) richtig bleibt.

Der Gleichung (6.1) kann man folgende Gestalt geben:

$$\frac{d}{ds}(Mu^{\alpha} - 2L^{\alpha}) = P^{\alpha}, \quad L^{\alpha} = -\frac{1}{2}\Omega^{\alpha\nu}\dot{u}_{\nu} \tag{6.4}$$

[vgl. (3.26)]. Wegen (6.3) ist, wie bekannt, P^0 die Leistung der Kraft P^i:

$$P^0 = P^1 v^1 + P^2 v^2 + P^3 v^3.$$

v^i ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \qquad (t = x^0).$$

Wir führen in (6.4) die Systemzeit t anstatt der Eigenzeit ein:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d}{dt}, \quad (v^2 = \Sigma v_i^2),$$

$$\frac{d}{dt}(Mu^0 - 2L^0 - A) = 0. \tag{6.5}$$

A ist die Arbeit von P^i; sie enthält eine willkürliche additive Konstante. Aus (6.5) erhalten wir den Energiesatz in der Form

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} + \Omega^{0i}\dot{u}_i = A.$$

Es ist aber

$$\Omega^{0i}u_0 = -\Omega^{ki}u_k, \text{ d. h., } \Omega^{0i} = -\Omega^{ki}v_k;$$

$$\Omega^{0i}\dot{u}_i = -\Omega^{ki}\frac{\dot{v}_i v_k}{\sqrt{1-v^2}},$$

mithin

$$\boxed{\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\Omega^{ik}}{1-v^2}v_i\frac{dv_k}{dt} = A.} \tag{6.6}$$

Führt man die gewöhnliche Zeiteinheit ($c = 3.10^{10}$ *cm sec*$^{-1}$) und, unter Zugrundelegung eines bis auf orthogonale Transformationen der *Raumachsen* bestimmten LORENTZschen Koordinatensystems, Vektorsymbole ein, so erhält (6.6) die Form

$$\boxed{\frac{c^2 M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{v^2}}} + \frac{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]\,\dot{\mathfrak{v}}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = A.} \tag{6.7}$$

Neben der Arbeit der äusseren Kraft (oder der potentiellen Energie: $A = -E_{pot} + const.$, wenn die Kraft aus einem Potential ableitbar ist) und der relativistischen Energie $c^2 M + \frac{1}{2} M v^2 + \ldots$ enthält unser Energiesatz (6.7) noch *Beschleunigungsenergie,* die sich als skalares Produkt zweier Vektoren ausdrückt: des Vektorproduktes von Drehimpuls und Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Es ist

$$(\Omega^{12}, \Omega^{23}, \Omega^{31}) = (\mathfrak{w}_z, \mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y)$$

der Drehimpuls des Systems in Bezug auf den Schwerpunkt,

$$(v^1, v^2, v^3) = (\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z)$$

die Geschwindigkeit des Schwerpunkts,

$$[\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}]_x = \mathfrak{w}_y \mathfrak{v}_z - \mathfrak{w}_z \mathfrak{v}_y = -(\Omega^{13} v^3 + \Omega^{12} v^2) = -\sum \Omega^{1k} v^k, \text{ usf.}$$

In nichtrelativistischer Fassung $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ besagt unser Energiesatz, falls ein Kräftepotential existiert:

$$\boxed{E_{kin} + E_{pot} + \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = E = const.} \tag{6.8}$$

Statisches Gravitationsfeld. Ist die Metrik $ds^2 = f^2\,dt^2 + g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ $(i, k, = 1, 2, 3)$ des Untergrundes von der Zeit $x^0 = t$ unabhängig, so ist für einen kovarianten Tensor A_λ

$$\dot{A}_0 \equiv u^\nu \nabla_\nu A_0 = \frac{dA^0}{ds} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} A^\mu A^\nu = \frac{dA_0}{ds}. \tag{6.9}$$

Da die g_{0i} gleich Null sind, verschwinden sämtliche $K^0_{\lambda\mu\nu}$, und die 0-te Komponente der Gleichung (3.29) vereinfacht sich für einen nicht geladenen Körper $(P^\alpha = 0)$ zu

$$M\dot{u}^0 + 2n^{\alpha\nu}\ddot{u}_\nu = 0.$$

Für die kovariante 0-te Komponente haben wir nach (6.9), wegen (3.26), indem wir $n^{\alpha\beta}$ durch $\frac{1}{2}\,\Omega^{\alpha\beta}$ ersetzen:

$$\frac{d}{ds}(Mu_0 - 2L_0) = 0,$$

$$L^0 = -\frac{1}{2}\,\Omega^{0\nu}\,\dot{u}_\nu = -\frac{1}{2}\,\Omega^{kl}v_k\,\dot{u}_l\,,$$

$$Mu_0 - 2L_0 = const.$$

Wir benutzen dabei die Beziehungen

$$v^i = \frac{dx^i}{dt},\ u^0 = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{f^2 - v^2}},\ u^i = \frac{v^i}{\sqrt{f^2 - v^2}},\ v^2 = -g_{ik}v^i v^k.$$

Wir gelangen so zu einer Beziehung, die zu (6.6) analog ist:

$$\boxed{\frac{Mf^2}{\sqrt{f^2 - v^2}} + f^2\sqrt{f^2 - v^2}\,\Omega^{ik}u_i\,\dot{u}_k = E = const.} \qquad (6.10)$$

Es wird dabei vorausgesetzt, dass das mechanische System ein Dipolskelett besitzt (Trägheitskugel).

Streszczenie

Prawa pola (elektromagnetycznego i grawitacyjnego) nazewnątrz materii przyjmujemy w postaci równań MAXWELLA-EINSTEINA. (Nasze wywody są, zresztą, oparte tylko na pewnych cechach zasadniczych struktury tych równań.) Materię charakteryzujemy przez potencjały wytwarzanego przez nią pola. Potencjały te dają się przedstawić, jako sumy potencjałów multipoli (podobnie do potencjału NEWTONOWSKIEGO bryły materialnej, nazewnątrz bryły). W ten sposób dochodzimy do pojęcia *szkieletu grawitacyjnego* systemu materialnego nienaładowanego. W szkielecie grawitacyjnym biegun pojedyńczy charakteryzuje masę, dipol i kwadrupol — moment obrotu. Podporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Z równań, spełnianych przez potencjały w świecie czterowymiarowym, otrzymujemy równania mechaniki w postaci równań o pochodnych zwykłych, określające ruch środka masy układu i zmiany naszych multipoli w czasie. *Z równań tych wynika, że ruch środka masy i obrót są z sobą*

związane. Nowe wyrazy w równaniach mechaniki, powodujące to powiązanie, znikają przy założeniu, że prędkość światła jest nieskończenie wielka. Równanie energii dla nowych równań mechaniki zawiera nowy wyraz: ***energię przyśpieszeniową***.

Uwzględnienie multipoli do kwadrupolu włącznie jest potrzebne i wystarczające, aby otrzymać prawa ruchu, przechodzące w prawa klasycznej mechaniki układu punktów i ciała sztywnego, gdy się założy, że prędkość światła jest nieskończenie wielka. Interpretacja multipoli przez wielkości klasyczne ma charakter przybliżony, natomiast równania ruchu, dla nich otrzymane, są matematycznie ścisłym warunkiem istnienia osobliwości multipolowych w rozwiązaniach równań grawitacyjnych nazewnątrz materii. Można przeto uważać multipole za samodzielną charakterystykę dynamiczną układu.

Oś obrotu występuje u nas jako konstrukcja wtórna (i to jest kwestią zasadniczą), natomiast wielkością, charakteryzującą obrót pierwotnie, jest tensor antysymetryczny. Dochodzimy do powiązania obrotu i ruchu środka masy według prawa, odmiennego od założenia FOKKERA co do ruchu osi bąka symetrycznego.

Literatur

Die Arbeiten des Verfassers:

ZS. f. Phys. **67**, 270 (1931) (Methode der Variationsgleichung);

ZS. f. Phys. **69**, 389 (1931) (ein strahlendes Elektron im äusseren Feld);

Math. Ann. **107**, 400 (1933) und *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **41**, 177 (1934) (deutsch)—zu § 2 (zu den Behauptungen über Lösungen der Feldgleichungen bei gekrümmtem Untergrund).

Über den Einfluss des Magnetfeldes auf die Fluoreszenz des Quecksilberdampfes und den Zeemaneffekt in Bandenspektren sehr lose gebundener Moleküle

O wpływie pola magnetycznego na fluorescencję pary rtęci i o zjawisku ZEEMANA w widmach pasmowych cząsteczek o bardzo słabym wiązaniu

Von S. MROZOWSKI, Warschau, Institut für theoretische Physik der Joseph Piłsudski Universität

(Eingegangen am 25. Juni 1937)

Es wurde der Intensitätsverlauf der mittels der Linie 2537 Å angeregten Quecksilberbandenfluoreszenz in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke untersucht und gezeigt, dass die Intensitätsmaxima und -minima bei gewissen Feldstärken unabhängig von der Struktur der erregenden Strahlung auftreten. Daraus wird gefolgert, dass nicht die *Hg*-Atome, sondern die lose gebundenen Hg_2-Moleküle direkt durch Absorption des Lichtes erregt werden und es wird eine Deutung des Mechanismus des ganzen Effektes gegeben. Zum Schluss werden allgemeine Überlegungen über den ZEEMANeffekt in Bandenspektren sehr lose gebundener Moleküle mitgeteilt.

Vor einigen Jahren hat NIEWODNICZAŃSKI (*5*) gezeigt, dass ein Magnetfeld auf die Intensität der Bandenfluoreszenz des Quecksilberdampfes im Falle der Anregung mittels der Resonanzlinie 2537 Å nur dann einen Einfluss ausübt, wenn sich die Anregungsstelle im Magnetfelde befindet. Bei gewissen Magnetfeldstärken werden Intensitätsmaxima und - minima beobachtet; die allgemeine Abhängigkeit der Intensität der Fluoreszenz von der Magnetfeldstärke ist in groben Zügen der in der Resonanzfluoreszenz des Quecksilberdampfes von SCHEIN (*8*) beobachteten und von der Hyperfeinstruktur der Quecksilberresonanzlinie stammenden periodischen Intensitätsveränderung ähnlich (Intensitätsmaxima bei gleichen Feld-

stärken). Da bei anderen Anregungsarten keine Beeinflussung der Fluoreszenzintensität entdeckt werden konnte, hat NIEWODNICZAŃSKI die Meinung ausgesprochen, dass entgegen allen anderen Fällen, wo die Quecksilbermoleküle direkt durch Absorption des Lichtes angeregt werden, im Falle der Resonanzlinienerregung primär nur die *Hg*-Atome zum $6\,^3P_1$-Niveau gehoben werden und die Bandenfluoreszenz sekundär als sensibilisierte Fluoreszenz hervortritt. Die magnetische Beeinflussung der Intensität der Bandenfluoreszenz soll nach NIEWODNICZAŃSKI von der Beeinflussung der Absorption der *Hg*-Atome stammen und eine Wiederholung der Versuche von SCHEIN darstellen, indem die Konzentration der $6\,^3P_1$-Atome nicht durch Beobachtung der Intensität der Atomresonanzstrahlung, sondern durch Beobachtung der Intensität der indirekt erregten sichtbaren Bandenfluoreszenz untersucht wird.

Gegen die Deutung von NIEWODNICZANSKI kann eine Reihe von Einwänden erhoben werden. Die Schärfe und Tiefe der Maxima und Minima in der Resonanzfluoreszenz ist, wie SCHEIN gezeigt hat, sehr stark von der Struktur der eigenstrahlten Linie 2537 Å abhängig. Die Verbreiterung der eigenstrahlten Linie 2537 Å hat eine Verwischung der periodischen Struktur der Intensitätskurve zur Folge. Dagegen hat NIEWODNICZAŃSKI die gleiche Intensitätsabhängigkeit von der Magnetfeldstärke für die Bandenfluoreszenz sowohl bei Anregung mit einer gekühlten wie auch mit einer ungekühlten Quecksilberbogenlampe beobachtet. Dies hat ihn, unter Annahme der der SCHEINschen analogen Deutung, zum zweifellos unrichtigen Schluss geführt, dass sich die Hyperfeinstruktur der Linie 2537 Å in der ungekühlten *Hg*-Bogenlampe deutlich bemerkbar macht. Der Verfasser hat kurze Zeit nach Veröffentlichung der NIEWODNICZAŃSKIschen Arbeit darauf hingewiesen (*1*), dass bekanntlich die Resonanzlinienkomponenten in der nichtgekühlten *Hg*-Lampe völlig selbstumgekehrt sind, und dass die von NIEWODNICZAŃSKI beobachtete Erscheinung ganz anders als die von SCHEIN untersuchte gedeutet werden muss, da NIEWODNICZAŃSKI ähnliche Intensitätsabhängigkeiten in beiden Fällen gefunden hat. Die von NIEWODNICZAŃSKI entdeckte Erscheinung kann daher nicht als Beweis für die primäre Anregung der *Hg*-Atome gelten. Wegen der hohen Dampfdichte werden die Linienmitten in einer sehr dünnen Dampfschicht völlig absorbiert, so dass in das Gefässinnere nur die Ränder der Hyperfeinstrukturlinien eindringen können und die Quecksilbermoleküle direkt durch Absorption der Linienränder erregt werden. Gleichzeitig hat der Verfasser die Ansicht ausgesprochen, dass aus gleichem Grunde bei den von Lord RAYLEIGH verwendeten Anregungsarten („*core*" und „*wing*") nur die Linienränder effektiv wirken und dass man es in beiden Fällen mit molekularen Anregungen zu tun hat. Die vom Verfasser hervorgehobene Tatsachen und Argumente wurden jedoch nicht als über-

zeugend angesehen (*7*) und da vor einem Jahr auf dem Photolumineszenzkongress die Frage der Deutung der NIEWODNICZAŃSKIschen Versuche wieder aufgetaucht ist,* hat sich der Verfasser entschlossen zur Klärung der Frage einige Versuche anzustellen, worüber im folgenden berichtet wird. Kurz vor dem Photolumineszenzkongress haben PRINGSHEIM und SALTMARSH (*6*) die Vermutung des Verfassers durch Polarisationsuntersuchungen bestätigt und in ganz überzeugender Weise gezeigt, dass die beiden von Lord RAYLEIGH verwendeten Anregungsarten zu direkter Molekülanregung führen.

Im ersten Teil der Versuche wurde die mittels eines stark gekühlten Quecksilberbogens [vgl. (*4*)] erregte sichtbare Fluoreszenz des gesättigten Quecksilberdampfes untersucht. Das Quarzgefäss mit dem Quecksilberdampf war zwischen den Polen eines mittelgrossen Elektromagneten angebracht; benutzt wurden zur Beleuchtungsrichtung transversale Magnetfelder bis 8000 Gauss. Die Stromstärke im Quecksilberbogen variierte zwischen 4 und 20 *Amp*. Die erregende Linie 2537 Å ist bei 4 *Amp* sehr scharf, da die maximale Erregung der Resonanzstrahlung für die Zimmertemperatur bei 6 *Amp* auftritt. Dagegen ist die Linie bei 20 *Amp* sehr stark verbreitert und die Komponenten treten selbstumgekehrt hervor. Um ein möglichst intensives grünes Leuchten zu erhalten, wurde die Temperatur des Quecksilberdampfes entsprechend hoch gewählt. Die Fluoreszenz wurde von der Einfallsseite der erregenden Strahlung beobachtet und die Untersuchungen nur visuell durchgeführt. Alle Beobachtungsergebnisse wurden von einer anderen Person geprüft, die zum Zwecke der Erhaltung vollkommen objektiver Resultate über den Stand der zu lösenden Aufgabe im unklaren gelassen wurde.

Zuerst konnte festgestellt werden, dass die Intensitätsschwankungen beim Einschalten des Magnetfeldes nur dann auftraten, wenn die Fluoreszenz mit zum Magnetfeld senkrecht polarisiertem Licht (elektricher Vektor) beleuchtet wurde. Da der π-Anteil keine Intensitätsschwankungen hervorruft und die Beobachtungen durch Steigerung der Fluoreszenzintensität erleichtert werden, wurden die weiteren Versuche bei unpolarisierter Anregung durchgeführt, trotzdem die Intensitätsschwankungen dabei weniger scharf werden. Weiter konnte festgestellt werden, das die Intensitätschwankungen durch Zusatz von 40 *cm* Stickstoff völlig vernichtet werden; beim Einschalten des Magnetfeldes wird die dünne, grün leuchtende Oberflächenschicht etwas dicker, d. h., das erregende Licht dringt etwas tiefer in da Gefäss ein, dagegen steigt die totale Intensität der Fluoreszenz nur sehr wenig an. Das grüne, in der Zimmertemperatur zum grossen Teil vom FÜCHTBAUEReffekt herrührende Leuchten, besteht bei

* S. die Kongressdiskussion in *Acta Phys. Pol.* **5**, 54—56 (1936).

höheren Dampfdichten ausschliesslich aus der grünen Fluoreszenzbande 4850 Å. Der Einfluss des Zusatzgases ist leicht zu erklären, wenn es berücksichtigt wird, dass die Stossbreite der Resonanzlinie sehr gross ist und die Hyperfeinstruktur völlig verwischt wird.

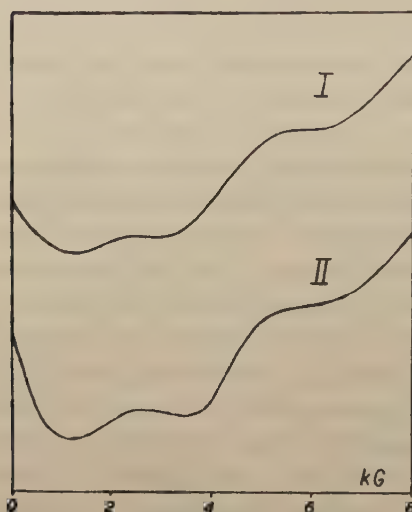


FIG. 1.

Der Verlauf der Intensität der Fluoreszenz des reinen Quecksilberdampfes in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke wird für den Fall der scharfen Anregungslinie (4 *Amp*) qualitativ in Fig. 1 durch die Kurve I dargestellt. Bei selbstumgekehrter Anregungslinie (20 *Amp*) wird der Anstieg der Fluoreszenzintensität für $H > 4$ *kG* in Übereinstimmung mit den NIEWODNICZAŃSKIschen Beobachtungen etwas schwächer, ausserdem scheint der Teil der Kurve von 1 bis 4 *kG* etwas tiefer (ähnlich der Kurve II) zu liegen. Bringt man zwischen der Bogenlampe und dem Fluoreszenzgefäss, recht weit vom Magnetfeld, ein Absorptionsgefäss mit reinem Quecksilberdampf bei Zimmertemperatur an, so wird bei scharfen Anregungslinie ein etwas abweichender Intensitätsverlauf beobachtet (Kurve II), die Kurve liegt im Gebiet von 1 bis 4 *kG* tiefer (wie bei der selbstumgekehrten Anregungslinie), jedoch wird der weitere Anstieg nicht merklich schwächer als im Falle I. Die Vergrösserung der Dampfdichte im Absorptionsgefäss durch Erhöhung seiner Temperatur verkleinert nur die Intensität der Fluoreszenz, ohne dass sich dabei der allgemeine Verlauf der Kurve II ändert.

Auf Grund der angeführten Versuche kann gesagt werden, dass *a)* das Auftreten der periodischen Intensitätsschwankungen vollig unabhängig von der Struktur der erregenden Linie ist, *b)* die Tiefe der Einsenkung in der Intensitätskurve bei 1-4 *kG* wird herabgemindert durch Anwesenheit von Licht, das genau die Mitten der Hyperfeinstrukturkomponenten enthält, *c)* der weitere Intensitätsanstieg ($H > 4$ *kG*) wird durch Anwesenheit der den Mitten der Hyperfeinstrukturkomponenten benachbarten Frequenzen hervorgerufen.

Um die Unabhängigkeit der Intensitätsschwankungen von der Struktur der erregenden Linie mit völliger Sicherheit festzustellen, wurde im zweiten Teil der Versuche eine Quecksilberbogenlampe im Magnetfeld eingerichtet und das Licht dieser Lampe zur Erregung der Fluoreszenz verwendet. Die Fluoreszenz wurde in destillierendem Quecksilberdampf

erregt, da das Quecksilber während der Destillation schnell von den Spuren der Zusatzgase gereinigt wird und so eine sehr starke Fluoreszenz auftritt. Um die Intensität noch mehr zu erhöhen, wurde die Fluoreszenz längs der Destillationsrichtung, senkrecht zur Erregungsrichtung, beobachtet. Diese Massnahmen mussten ergriffen werden, da ein grosser Teil der Lampe abgeblendet werden musste, damit nur die Strahlung aus dem mittleren Teil, wo das Magnetfeld homogen ist, zur Erregung benutzt wurde. Die Intensität der Fluoreszenz wurde deshalb kleiner als in den Versuchen des ersten Teiles dieser Arbeit. Das Fluoreszenzgefäss wurde zwischen den Polen eines kleinen Elektromagneten* eingerichtet, dessen maximale Feldstärke beim benutzten Polabstand 4 *kG* beträgt. Dieses Magnetfeld war dem im grossen Magnet erregten Feld parallel gerichtet. Die benutzte Bogenlampe brannte ruhig bei 110 *V* Spannung (der Hauptteil des Spannungsabfalls steckt in den regulierbaren Wiederständen) und ca. 4 *Amp* Stromstärke bei den höchsten angewandten Magnetfeldstärken (13 *kG*). Der Verfasser hofft im Zusammenhang mit anderen Fragen in nächster Zeit über Einzelheiten der Konstruktion dieser Lampe berichten zu können. Da die Entladung nicht an die Quarzwand gepresst war, emittierte die Lampe die selbstumgekehrte Resonanzlinie 2537 Å, wie mittels geeigneter Interferenzapparate festgestellt werden konnte. Beim Einschalten des Magnetfeldes beobachtet man angenähert (wegen Überlagerungen im Hintergrund) den ZEEMANeffekt der Linie 2537 Å in Absorption, so dass z. B. für 1200 Gauss, wenn die σ-Komponenten gerade zwischen den feldlosen Lagen der Hyperfeinstrukturlinien liegen, das σ-Licht der Bogenlampe aus Wellenlängen besteht, die genau gleich denen einer nicht selbstumgekehrten Lampe im feldfreien Fall sind.

Mit dieser Apparatur wurden wiederum ausschliesslich visuelle Beobachtungen der Fluoreszenzintensität gemacht. Es ergab sich, dass der Intensitätsverlauf in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke im Fluoreszenzgefäss für verschiedene Magnetfeldstärken in der Bogenlampe H_b in groben Zügen gleich ist und dem in Fig. 1 dargestellten ähnelt, was den Punkt *a* bestätigt. Bei $H_b = 1200$ Gauss wird ein weniger tiefes Minimum zwischen 1-4*kG* beobachtet, was mit der festgestellten Tatsache *b* übereinstimmt. Beobachtet man die Fluoreszenz ohne Magnetfeld und verändert das Magnetfeld in der Lampe, so ist zwischen 0-4*kG* eine Intensitätsschwächung vorhanden, oberhalb 4 *kG* dagegen eine allmähliche Intensitätsverstärkung zu bemerken. In groben Zügen ist also der Verlauf der Kurve der gleiche, wie bei I, nur etwas glatter, d. h., ohne periodische Schwankungen. Dass die periodischen Schwankungen überhaupt nicht, oder nur sehr schwach

* Für die liebenswürdige leihweise Überlassung des Elektromagneten bin ich Herrn Doz. Dr. W. KAPUŚCIŃSKI und Herrn Prof. Dr. S. PIEŃKOWSKI zum besten Dank verpflichtet.

auftreten, ist wahrscheinlich mit der Kompliziertheit der Reabsorptionserscheinungen im ZEEMANeffekt in Verbindung zu bringen.

Die Unabhängigkeit der Intensitätschwankungen von der Struktur der erregenden Linie beweist, dass die Deutung von NIEWODNICZAŃSKI unzutreffend ist und dass der ganze Effekt nur durch die komplizierten im Fluoreszenzgefäss herrschenden Bedingungen hervorgerufen wird. Im Falle der Anregung mit der selbstumgekehrten Linie bei Filtrierung des Lichtes durch ein warmes ($30^0 C$) Absorptionsgefäss (Apparaturanordnung Teil I), werden praktisch nur Wellenlängen hindurchgelassen, die zwischen den Hyperfeinstrukturlinien liegen. Wenn die Fluoreszenz durch Absorption der Atome erregt würde, müsste die Intensität beim Einschalten eines Magnetfeldes zuerst bis 1200 Gauss wachsen, da die σ-Komponenten in die zwischen den Hyperfeinstrukturlinien liegende Gebiete hineinwandern, und dann bis 2500 Gauss abfallen (Herauswanderung der σ-Komponenten) u. s. w., also einen entgegengesetzten Verlauf wie Fig. 1 zeigen. Deshalb muss der ganze Effekt anders erklärt werden.

Bei den angewandten Quecksilberdampfdichten werden die Hyperfeinstrukturlinien aus dem erregenden Licht in einer sehr dünnen Oberflachenschicht herausabsorbiert, so dass nur das Licht, das zwischen den Hyperfeinstrukturlinien gelegene Wellenlängen enthält, in das Innere des Gefässes, wo die Fluoreszenz beobachtet wird, hineindringen kann. Dort werden nicht die Atome, sondern die Hg_2-Moleküle angeregt, wie dies PRINGSHEIM und SALTMARSH gezeigt haben. Die Molekülfluoreszenz ist magnetisch unbeeinflussbar, was mit der Kleinheit des ZEEMANeffektes in den Bandenspektren zusammenhängt; die Intensitätsschwankungen werden durch die Schirmwirkung der dünnen Dampfschicht an der Eintrittstelle des erregenden Bündels hervorgerufen, indem ein Intensitätsminimum während der Hindurchwanderung der ZEEMANkomponenten der Atomlinien durch die zwischen den Linien liegende Gebiete beobachtet wird. Im letzteren Falle wird der die Molekülfluoreszenz im Gefassinneren erregende Hintergrund durch die dünne Eintrittschicht aufgefangen. Die Wirkung der dünnen Oberflächenschicht ist mit der Wirkung des vom Verfasser konstruierten magnetischen Hyperfeinstrukturfilters (*2*) identisch.

Diese Deutung besitzt mehrerere Vorteile: erstens ist die spektrale Zusammensetzung des die Molekülfluoreszenz erregenden Lichtes nach Filtrierung in der Oberflächenschicht in groben Zügen von der Struktur der erregenden Linie unabhängig (*a*), zweitens wird die relative Kleinheit des zweiten Maximums (2600 Gauss) verständlich bei Betrachtung von Fig. 6 einer früheren Arbeit des Verfassers [(*2*), Teil I] wenn man bemerkt, dass bei 2600 Gauss nur der zwischen den Hyperfeinstrukturlinien 0 und +11,5 *m*A gelegene Teil des anregenden Spektrums durch die Oberflächenschicht hindurchgelassen wird (der Teil zwischen — 25,4 und — 10,4 wird durch

damals unbekannte und deshalb in Fig. 6 nicht berücksichtigte σ - Komponenten überlagert, vgl. (*2*), Teil II). Weiter ist es auf Grund der Deutung von NIEWODNICZAŃSKI unmöglich das Anwachsen der Intensität für mehr als 4 *kG* betragende Felder zu erklären. Bei ausschliesslicher Erregung der Atome kann die Intensität bei keiner Magnetfeldstärke die feldlose Intensität übersteigen, dagegen muss sie für weitere Maxima oberhalb 5 *kG* ständig sinken [vgl. z. B. Fig. 7 der Arbeit von SCHEIN (*8*)]. Bei meiner Deutung ist das Anwachsen ganz natürlich: wenn nämlich die absorbierenden Atomkomponenten zu beiden Seiten des Hyperfeinstrukturlinienkomplexes weggeschoben werden, können die Moleküle ungehindert das Licht absorbieren, was Anlass zur Steigerung der Intensität gibt.

Die Molekülfluoreszenz kann durch alle Wellenlängen in der ganzen Breite des Linienkomplexes erregt werden, die maximale Molekülabsorption dagegen liegt zwischen den feldlosen Lagen der Linien, da die Absorption der sehr lose gebundenen Moleküle von der Mitte jeder Linie ständig nach langen Wellenlängen abnimmt, so dass an Stelle der feldlosen Lagen der Linien noch eine viel intensitätsschwächere Molekülfluoreszenz (die der benachbarten kurzwelligeren Linie entspricht) erregt wird. Eine leichte Überlegung zeigt, dass im Falle eines konstanten Absorptionskoeffizienten der Moleküle im ganzen Gebiet doppelt so viel Intensitätschwankungen im Gebiet o—8 *kG* beobachtet werden müssten, die aber eine ganz kleine Amplitude hätten. Wenn die Absorption nur zwischen den Linien von Null verschieden wäre, dann müssten scharfe Maxima und Minima in normalen Lagen auftreten, die Anwesenheit eines von Null verschiedenen Molekülabsorptionskoeffizienten in den feldlosen Lagen der Linien wird die Schärfe der Maxima und Minima vermindern, selbstverständlich nur dann, wenn das anregende Licht entsprechende Wellenlängen enthält. Durch diese Überlegung findet die Tatsache *b* eine zwangsläufige Erklärung.

Die oben geäusserte Auffassung, dass die Linienabsorption magnetisch beeinflussbar, die Molekülabsorption dagegen unbeeinflussbar ist, ist weitgehend zu schematisch. In Wirklichkeit steht die Sache so, dass es einen kontinuierlichen Übergang von der Atom - zur Molekülabsorption gibt. Wenn zwei *Hg* - Atome in nicht zu starke Wechselwirkung treten, wobei das eine normal und das andere zum Zustand $6\,^3P_1$ angeregt ist, so wird die Drehimpulsquantenzahl $J = 1$ des angeregten Atoms eine quantisierte Komponente Ω längs der die Atome verbindenden Linie haben ($\Omega = 0{,}1$) und es enstehen zwei Zustände des Moleküls, deren Abstand ein Mass für die Stärke der Wechselwirkung des Bahnmoments des Elektrons mit dem durch Störung hervorgerufenenen axialsymmetrischen elektrischen Feld darstellt.*

---

* Die Bildung der Drehimpulskomponente Ω längs der Verbindungslinie ist für die Depolarisation der Atomresonanz durch Zusatzgase verantwortlich. Bei Stössen, wo die

Je weiter voneinander die beiden Atome entfernt sind, desto kleiner wird die letztgenannte Wechselwirkung und um so kleinere Magnetfelder werden die Entkopplung des Drehimpulses von der Molekülachse herbeiführen. Es ist also zu erwarten, dass auf der langwelligen Seite jeder Resonanzhyperfeinstrukturlinie ein kontinuierlicher Übergang von der magnetisch beeinflussbaren Atomfluoreszenz zur unbeeinflussbaren Molekülfluoreszenz vorhanden ist. Je weiter die Wellenlänge von der feldlosen Lage der Atomlinie liegt, desto stärkere Magnetfelder werden zur Beobachtung einer Aufspaltung nötig. Es lässt sich nicht abschätzen, wie gross die Magnetfelder sein müssen, die eine Entkopplung des Drehimpulses J und den Übergang zum atomaren ZEEMANeffekt (also eine dem PASCHEN-BACK-Effekt analoge Erscheinung) im Fall der zwischen den Hyperfeinstrukturlinien gelegenen Molekülfluoreszenz des Quecksilberdampfes herbeiführen sollen, da der Abstand der Potentialkurven $\Omega = 0$ und $\Omega = 1$ für das Quecksilbermolekül in Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht genau, und im betrachteten Gebiet im allgemeinen gar nicht bekannt ist [s. z. B. die die Struktur der Hg_2-Banden betreffenden Arbeiten des Verfassers (*3*)]. Es kann die Vermutung ausgesprochen werden, dass eine Entkopplung schon bei einigen Tausend Gauss auftreten muss, so dass die ganze in dieser Arbeit untersuchte Erscheinung in den Einzelheiten einen viel komplizierteren Verlauf hat als in der angegebenen schematischen Filtereffektdeutung angenommen wurde. Wahrscheinlich hätten PRINGSHEIM und SALTMARSH die Unbeeinflussbarkeit der Polarisation der Molekülfluoreszenz nicht feststellen können, wenn sie stärkere Magnetfelder zur Depolarisation verwendet hätten. Dass die oben angegebene Filtereffektdeutung zu grob und ungenügend verfeinert ist, zeigt z. B. die Beobachtung, dass der Verlauf der Kurve II, Fig. 1, etwas modifiziert wird, wenn man das Absorptionsgefäss direkt vor dem Fluoreszenzgefäss im gleichen Magnetfeld einrichtet (das Maximum bei 2600 Gauss verschiebt sich auf 2000 Gauss und wird intensiver), obwohl auf Grund der Filterdeutung durch die Anwesenheit des Absorptionsgefässes keine Veränderung der Lagen der Intensitätsmaxima hervorgerufen werden sollte. Auch ist die Deutung des Anwachsens der Intensität bei Erregung mit der Bogenlampe in Magnetfeldern oberhalb 4 kG (II Teil der Versuche) nicht ganz ohne Schwierigkeiten durchführbar.

Eine eventuelle Verfeinerung des Deutungsschemas scheint recht kompliziert aber interessant und versprechend zu sein aus dem Grunde, weil dank der kleinen DOPPLER-und Stossbreiten der Linien im Falle des Quecksilberdampfes der allmähliche Übergang von der Atom-zur Molekülfluoreszenz untersucht werden könnte.

Atome sehr dicht aneinanderrücken, ist die Wechselwirkung sehr stark und es wären nicht erreichbar starke Magnetfelder nötig um J zu entkoppeln und die depolarisierende Wirkung fast aller Stösse aufzuheben.

Zum Schluss möchte ich nicht versäumen Herrn Prof. C. BIAŁOBRZESKI für das Interesse an diesen Versuchen und seine stetige Liebenswürdigkeit meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Streszczenie

Zbadano zależność natężenia fluorescencji pary rtęci wzbudzonej światłem linii 2537 Å od natężenia pola magnetycznego. Wykazano, że maxima i minima występują niezależnie od struktury linii wzbudzającej przy pewnych określonych natężeniach pola magnetycznego, na podstawie czego wyciągnięto wniosek, że nie atomy rtęci, lecz słabo związane cząsteczki rtęci zostają bezpośrednio wzbudzone przez światło. Podano szkicowe wyjaśnienie mechanizmu zbadanego zjawiska oraz nieco ogólnych rozważań dotyczących zjawiska ZEEMANA w widmach pasmowych cząsteczek o bardzo słabym wiązaniu.

Literaturverzeichnis

1. MROZOWSKI S.: *ZS. f. Phys.* **50**, 410 (1930).
2. MROZOWSKI S.: *Bull. Acad. Pol.* 464 (1930) (I); ebenda 489 (1931) (II).
3. MROZOWSKI S.: *ZS. f. Phys.* **87**, 340 (1934) (I); ebenda **104**, 228 (1937) (II); ebenda **106**, 458 (1937) (III).
4. MROZOWSKI S.: *Acta Phys. Pol.* **3**, 447 (1934).
5. NIEWODNICZAŃSKI H.: *ZS. f. Phys.* **55**, 676 (1929).
6. PRINGSHEIM P. und SALTMARSH O. D.: *Proc. Roy. Soc.* **154**, 90 (1936).
7. RAYLEIGH, Lord: *Proc. Roy. Soc.* **132**, 650 (1931).
8. SCHEIN, M.: *Ann. d. Phys.* **85**, 257 (1928); *Helv. Phys. Acta* **2** (1929), Supl. I.

Über den Einfluss der Temperatur auf die Fluoreszenzausbeute einer Anthrazenlösung in Paraffinöl

O wpływie temperatury na wydajność fluorescencji roztworu antracenu w oleju parafinowym

Von Sophie GRYGLEWICZ, Warschau, Institut für Experimentalphysik der Joseph Piłsudski Universität

(Eingegangen am 14. Juli 1937)

In vorliegender Arbeit wurde der Einfluss der Temperatur auf die Fluoreszenzausbeute einer Anthrazenlösung untersucht, indem man den Temperatureinfluss auf die Intensität der Fluoreszenz- und Absorptionsbanden studierte.

Bei Temperaturerniedrigung einer fluoreszierenden Lösung vermindern sich die Dichtefluktuationen und damit auch die Energie der intermolekularen Kräfte und die Wahrscheinlichkeit der Auslöschung der Fluoreszenz. Mit fallender Temperatur muss also die Intensität der Spektralbanden steigen, was auf eine Abhängigkeit der Fluoreszenzausbeute von der Temperatur hindeutet. Um diese Abhängigkeit festzustellen, wurde eine Anthrazenlösung in Paraffinöl untersucht, da dieses, mit Hinsicht auf den grossen Unterschied zwischen Gefrier- und Siedepunkt des Lösungsmittels, die Anwendung eines grossen Temperaturbereiches erlaubte.

Die Fluoreszenzausbeute der Lösung wurde in zwei Etappen bestimmt. Um einen passenden Wellenlängenbereich für die Untersuchungen ausfindig zu machen, wurden zuerst die Wellenlängen der Absorptionsmaxima gemessen und dann erst die Intensitätsmessungen des Absorptions- und Emissionsspektrums der Anthrazenlösung bei drei Temperaturwerten vorgenommen, was die Berechnung der Ausbeute in Abhängigkeit von der Temperatur erlaubte.

Das Absorptionsspektrum der Anthrazenlösung in Paraffinöl

Die Strukturformel von Anthrazen ist in Fig. 1 dargestellt, wobei nach LIEBERMANN (*2*) für die Fluoreszenz der mittlere Ring (Fig. 2) verantwortlich ist.

Bei den Absorptionsuntersuchungen fand als Lichtquelle eine Wasserstofflampe Anwendung, die ein kontinuierliches Spektrum von 3500—2100 Å lieferte. Die im langwelligen Spektralbereich auftretenden Linien dienten als Bezugspunkte bei der Bestimmung der Wellenlängen der Absorptionsmaxima. Bei den Absorptionsmessungen wurde eine Lösung von konstanter Konzentration ($1{,}315 \cdot 10^{-4}$ *g/cm*^{3}) benutzt, wobei Schichtdicken von 0 bis 15 *mm* verwendet wurden. Das Absorptionsspektrum wurde mit einem FUESSschen Quarz-Spektrographen photographiert, dessen Dispersion im Mittel 79,9 Å/*mm* im Bereich von 4000—2700 Å betrug. Die Maxima der Absorptionsbanden wurden aus Mikrophotometerkurven bestimmt; die entsprechenden Wellenlängen sind in Tabelle I zusammengestellt.

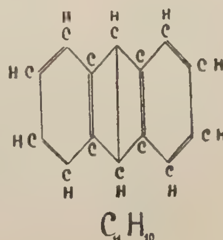


FIG. 1



FIG. 2

Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, können die Absorptionsbanden in zwei Gruppen eingeteilt werden, in solche mit diffusen

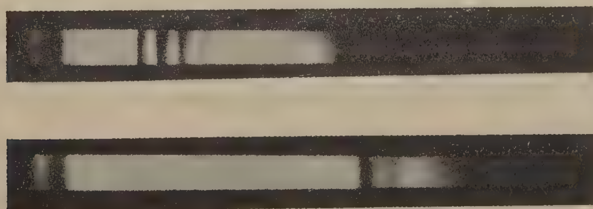


FIG. 3

Maximen und grösserer Intensität und in solche mit schärferen Maximen und kleinerer Intensität. Die Maxima des ersten Typus sind in Tabelle I in der Gruppe 1, die des zweiten in der Gruppe 2 aufgezählt.

Tabelle I.

Wellenlängen der Absorptionsmaximen der Anthrazenlösung in Paraffinöl

Gruppe	λ Å	ν cm^{-1}	$\Delta\nu$
1	3780	26455	1400
	3590	27855	1513
	3405	29368	1353
	3255	30721	1485
	3105	32206	1865
	2935	34071	4914
	2565	38985	1500
	2470	40485	
2	3740	26737	1471
	3545	28208	1503
	3365	29711	

Die Absorptionsbanden mit Maximen im Spektralbereich von 3800—2800 Å wurden bei einer 1,5 *mm* dicken Absorptionsschicht beobachtet, die mit Maximen bei 2565 Å und 2470 Å bei 0,75 *mm* Schichtdicke. Die mittlere Fehlergrenze für die Wellenlängenbestimmung betrug etwa 10 Å; für die diffusen Maxima, d. h., für 3105 Å und 2935 Å, etwa 50 Å.

Bei der Bestimmung der relativen Ausbeute wurde der Einfluss der Banden 2565 Å und 2470 Å auf die Fluoreszenz nicht beachtet, da es experimentell schwierig war, die Untersuchungen mit zwei verschiedenen Schichtdicken unter Berücksichtigung des Einflusses beider Absorptionsbereiche auf die Fluoreszenz durchzuführen. Deshalb wurden sowohl die Absorptions- als auch die Fluoreszenzmessungen nur im Bereich 4000—2700 Å durchgeführt.

Die relative Ausbeute der Fluoreszenz der Anthrazenlösung in Paraffinöl

Um eventuelle Unterschiede in der Fluoreszenzausbeute der Anthrazenlösung in Abhängigkeit von der Temperatur festzustellen, wurden die Intensitätsmessungen sowohl im Absorptions- als auch im Emissionsspektrum ausgeführt.

Alle Messungen wurden mit unveränderter Apparatur bei konstanter Konzentration der Lösung und konstanter Belichtungszeit durchgeführt. Nur die Temperatur wurde verändert, und zwar betrug sie der Reihe nach $+120^0 C$, $+20^0 C$ und $-42^0 C$.

Die Apparatur (Fig. 4) war wie folgt angeordnet. Als Lichtquelle

diente eine Vitaluxlampe *A*, die ein kontinuierliches Spektrum bis 2600 Å lieferte. Das Licht der Lampe passierte die Blende *B*, das SCHOTTsche Filter *UG2* (*C*), welches den Wellenlängenbereich 4000 Å—2700 Å durchliess, die Linse *D* und endlich das in den Ofen *G* eingeführte Absorptionsgefäss *E* mit der Anthrazenlösung. Photographiert wurde, wie schon erwähnt, mit einem Quarzspektrographen von FUESS (79,9 Å/*mm* mittlere Dispersion). Das Absorptions-, sowie auch das Fluoreszenzgefäss, waren aus Quarzglas und befanden sich im Metallofen *G*, der ähnlich konstruiert war, wie der, den Frl. MAKOWIECKA (*3*) benutzte, mit dem Unterschied, dass dieser Ofen sowohl zu Fluoreszenz- als auch zu Absorptionsmessungen verwendet werden konnte. Der Ofen war mit 3 Quarzfenstern *K* in Gestalt von planparallelen Vakuum-Absorptionsgefässen versehen, die durch die kleinen elektrischen Öfen *L* zur Vermeidung von Gefrieren bei tiefen Temperaturen erwärmt wurden.

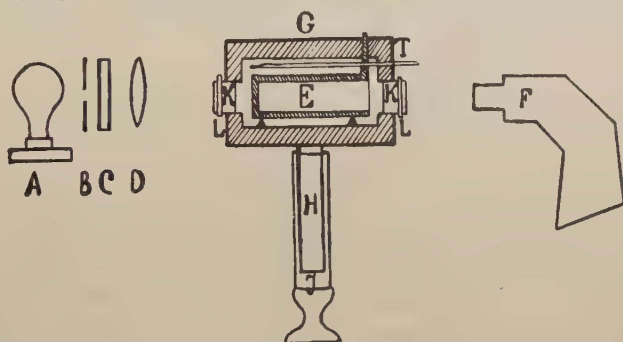


FIG. 4

Zwei Fenster dienten zu Absorptions-, und das dritte, senkrecht zur Längsachse des Ofens angebrachte, zu Fluoreszenzmessungen. Der Ofen war mit dem Metallrohr *H* verbunden, das zur Erzielung tiefer Temperaturen in das mit flüssiger Luft gefüllte DEWARsche Gefäss *I*, zur Erzielung hoher Temperaturen dagegen in einen elektrischen Ofen eingetaucht werden konnte. Die Dicke der Absorptionsschicht war konstant und betrug nach Messungen unter Anwendung optischer Methoden 1,55 *mm*. Die bei den Messungen benutzte Konzentration der Lösung betrug $1{,}315 \cdot 10^{-4}\, g/cm^3$.

Die Temperatur im Ofen wurde mit dem Alkoholthermometer *T* oder auch mit einem für hohe Temperaturen geeichten Thermoelement gemessen.

Bei den Intensitätsmessungen des Absorptionsspektrums wurde das Absorptionsspektrum des Lösungsmittels, d. h., des Paraffinöls, allein und dasjenige der Anthrazenlösung in Paraffinöl auf einer Platte bei gleicher Temperatur aufgenommen. So konnte die Absorption des Lösungsmittels eliminiert werden. Bei den Intensitätsmessungen des Fluoreszenzspektrums war der Anteil der Fluoreszenz des Lösungsmittels verschwindend klein,

wie entsprechende photographische Versuche erwiesen. Deshalb wurden nur die Fluoreszenzbanden der Anthrazenlösung aufgenommen.

Ausserdem wurden auf jeder Platte Intensitätsmarken aufgenommen. Es wurde dazu ein am Spektrographen angebrachter ZEISSscher Platinstufenabschwächer (*Pt* auf Quarz) benutzt, der mit einer Wolframglühlampe belichtet wurde.

Aus den Mikrophotometerkurven der Spektren und den Empfindlichkeitskurven der Platten für 16 verschiedene Wellenlängen erhält man Zahlenwerte, aus denen die Intensität der Spektralbanden relativ zur Intensität des Spektrums der Wolframlampe berechnet werden kann. Zur Erhaltung der Energieverteilung der Banden muss noch die Energieverteilung der Glühlampe nach dem PLANCKschen Gesetz für die entsprechende Farbtemperatur des Wolframbandes berücksichtigt werden. Die Helligkeitstemperatur des Wolframbandes wurde mit einem optischen Pyrometer gemessen und mit Hilfe der Daten von FORSYTHE und WORTHING (*1*) auf die Farbtemperatur umgerechnet.

Danach wurden die Intensitätskurven der Fluoreszenz- und Absorptionsspektren unter Berücksichtigung der PLANCKschen Energieverteilung graphisch dargestellt (Fig. 5, 6, 7, 8).

Versteht man unter der Intensität der Banden die totale in der Zeiteinheit emittierte oder absorbierte Energie im ganzen Spektralbereich, so wird die durch die Intensitätskurven (Fig. 5, 6, 7, 8) begrenzte Fläche pro-

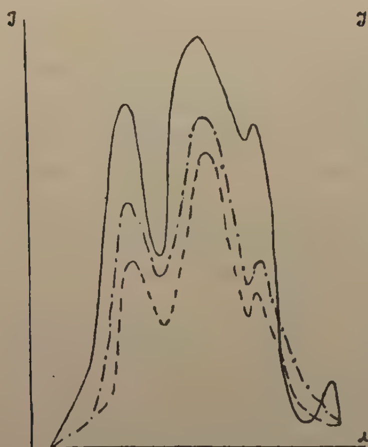


FIG. 5. Intensitätskurven der Fluoreszenzspektren der Anthrazenlösung in Paraffinöl bei den Temperaturen: ——— −42° *C*, —·—· +20° *C*, — — — +120° *C*.

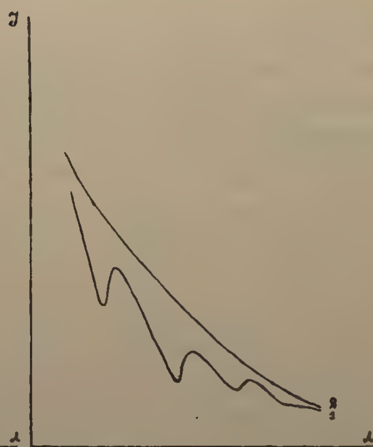


FIG. 6. Intensitätskurven der Absorptionsspektren der Anthrazenlösung im Paraffinöl (*1*) und des Lösungsmittels allein (*2*) bei der Temperatur −42° *C*.

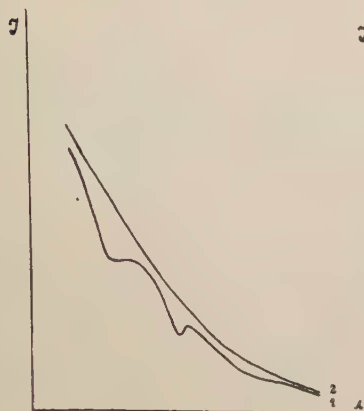


FIG. 7. Intensitätskurven der Absorptionsspektren der Anthrazenlösung im Paraffinöl (*1*) und des Lösungsmittels allein (*2*) bei der Temperatur $+20^0 C$.

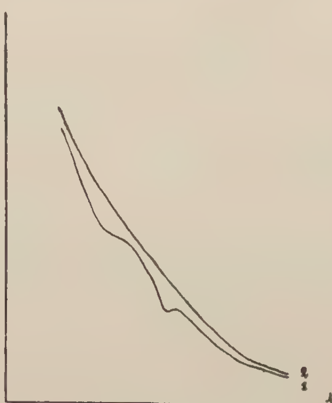


FIG. 8. Intensitätskurven der Absorptionsspektren der Anthrazenlösung im Paraffinöl (*1*) und des Lösungsmittels allein (*2*) bei der Temperatur $+120^0 C$.

portional zur Intensität aller Banden zusammen sein. Bei den Absorptionskurven ist diese Fläche einerseits durch die Intensitätskurve des Absorptionsspektrums der Anthrazenlösung (Fig. 6(1), 7(1), 8(1)), andererseits durch diejenige des Absorptionsspektrums des Lösungsmittels allein (Fig. 6 (2), 7 (2), 8 (2)) begrenzt.

Im Falle der Fluoreszenzspektren ist diese Fläche durch die Intensitätskurve der Anthrazenlösung und die λ-Achse begrenzt (Fig. 5). Durch Planimetrierung erhält man die gesuchten Inhaltswerte in cm^2 (Tabelle II). In Tabelle II sind die Ergebnisse für je zwei Aufnahmeserien angegeben, da alle Aufnahmen in vorliegender Arbeit doppelt ausgeführt wurden und die relative Intensität den Mittelwert aus den beiden Messserien darstellt.

Das Verhältnis des durch den Flächeninhalt der Fluoreszenzspektren gegebenen Zahlenwertes zu dem der Absorptionsspektren bei gleicher Temperatur, bezogen auf das als Einheit angenommene Verhältnis bei $+120^0 C$, ergibt die relative Ausbeute der Anthrazenlösung bei gegebener Temperatur. Wie aus den in Tabelle II angegebenen Zahlenwerten ersichtlich ist, ist die relative Intensität der Fluoreszenz der Anthrazenlösung in Paraffinöl innerhalb der Fehlergrenzen, die $8^0/_0$ nicht überschreiten, von der Temperatur unabhängig. Die Intensität aller Banden wächst nicht nur in den Fluoreszenzspektren, wie aus Fig. 5 und Tab. II (I_1) ersichtlich ist, sondern auch in den Absorptionsspektren (Tab. II, I_2-Werte), so dass eine von der Temperatur unabhängige relative Ausbeute resultiert.

Tabelle II.

Temp. °C	+ 120°C	+ 20°C	— 42°C
Flächeninhalt in cm^2 I Serie der Emissionsspektren	642,8	838,8	1097,45
Flächeninhalt in cm^2 II Serie der Emissionsspektren	646,75	834,1	1099,2
Mittelwert I_1 des Flächeninhalts für die Emissionsspektren	644,77	836 45	1098,325
Flacheninhält in cm^2 I Serie der Absorptionsspektren	69	86,75	134
Flächeninhalt in cm^2 II Serie der Absorptionsspektren	73,25	92,05	127
Mittelwert I_2 des Flächeninhalts für die Absorptionsspektren	71,125	89,4	130,5
Quotient I_1/I_2	9,065	9,35	8,416
Relative Fluoreszenzausbeute der Anthrazenlösung in Paraffinöl	1	1,03	0,928

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. S. PIEŃKOWSKI für die Überlassung das Themas und die freundliche Leitung dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Gleichzeitig danke ich Herrn Doz. Dr. A. JABŁOŃSKI für die mir erteilten wertvollen Ratschläge.

Streszczenie

W celu wyznaczenia wydajności fluorescencji roztworu antracenu w oleju parafinowym rozpoczęto pracę od zbadania widma absorpcyjnego tego związku i na podstawie rozciągłości tego widma wyznaczono przedział widmowy od 4000 Å do 2700 Å, w którym były wykonane dalsze pomiary.

Wyznaczenie wydajności fluorescencji dla pasm antracenu, zawartych w powyższym przedziale widmowym, sprowadzało się do pomiaru natężeń światła pochłoniętego i wypromieniowanego na drodze fotometrii fotograficznej. Pomiary te były wykonane dla trzech różnych temperatur w jednakowych warunkach doświadczalnych. Przyjmując stosunek natężenia światła

pochłoniętego do wypromieniowanego dla jednej temperatury za równy jedności można było wyliczyć wydajność względną fluorescencji roztworu antracenu dla innych temperatur. Wydajność ta okazała się w granicach błędów doświadczalnych niezależną od temperatury.

Literaturverzeichnis

1. FORSYTHE, W. E. and WORTHING, A. G.: *Astrophys. Journ.* **61**, 146 (1925).
2. LIEBERMANN, C.: *Ber. Chem. Ges.* **13**, 913 (1880).
3. MAKOWIECKA, M.: *Acta Phys. Pol.* **2**, 357 (1934).

Das zitternde Elektron und seine Dynamik

Drżący elektron i jego dynamika

Von MYRON MATHISSON, Warschau

(Eingegangen am 8. September 1937)

I. Die Zitterbewegung
II. DE BROGLIE-Wellen und Quantengesetze in kinematischer Beleuchtung

Die neuen, vom Verfasser abgeleiteten, dynamischen Grundgleichungen enthalten, den klassischen Gleichungen gegenüber, ein Zusatzglied, das vom Drehimpuls abhängt. Das neue Glied bewirkt, dass ein Teilchen mit der Masse M und dem Drehimpuls Ω eine *Eigenfrequenz* besitzt: der Schwerpunkt des Teilchens führt Schwingungen aus mit der Frequenz $\nu = \frac{Mc^2}{2\pi\Omega}$ (Abschnitt I).

Die Phase der Zitterbewegung hängt von der Eigenzeit des Teilchens ab und ist im allgemeinen keine eindeutige Funktion der Koordinaten. Die Quantengesetze der älteren Quantentheorie haben zur Folge, dass die Phase eindeutig wird. Einführung der PLANCKschen Konstante in die Eindeutigkeitsbedingungen führt mit Notwendigkeit zum Wert $\frac{h}{4\pi}$ für den Drehimpuls des Elektrons. Es ergibt sich zugleich eine neue Fassung der DE BROGLIE-Wellen (Abschnitt II). In allen Betrachtungen begnügen wir uns mit der unrelativistischen Näherung.

I. Die Zitterbewegung

Die Grundlage der vorliegenden Arbeit bilden die Bewegungsgleichungen eines Körpers, die der Verfasser aus der allgemeinen Relativitätstheorie gewonnen hat [*Neue Mechanik materieller Systeme*, Formeln (6.1) und (6.2), *Acta Phys. Pol.* **6**, 163 (1937)]:

$$M\dot{u}^{\alpha} + \Omega^{\alpha\nu}\ddot{u}_{\nu} = P^{\alpha}, \tag{I.1}$$

$$\dot{\Omega}^{\beta\lambda} - \Omega^{\lambda\alpha}\dot{u}_\alpha u^\beta + \Omega^{\beta\alpha}\dot{u}_\alpha u^\lambda = 0. \tag{I.2}$$

In dieser Form sind die Gleichungen auf eine MINKOWSKIsche Welt bezogen (Lichtgeschwindigkeit=1) und lassen eine LORENTZtransformation zu. Neben der konstanten Masse M, der Vierergeschwindigkeit u^α des Schwerpunkts (Ableitungen nach der Eigenzeit werden durch Punkte angedeutet) und der Kraft P^α kommen in unseren Gleichungen die Komponenten des Drehimpulses, $\Omega^{\alpha\beta}$, vor. Der Drehimpuls ist ein antisymmetrischer Tensor, der die Orthogonalitätsbeziehung

$$\Omega^{\alpha\beta} u_\beta = 0 \tag{I.3}$$

erfüllt. Seine Komponenten in einem LORENTZschen Koordinatensystem, in welchem der Schwerpunkt momentan ruht, können einem Vektor $\mathfrak{w}$ zugeordnet werden:

$$\Omega^{0i} = 0 \;\; (i = 1, 2, 3), \quad (\Omega^{23}, \Omega^{31}, \Omega^{12}) = (\mathfrak{w}_z\,,\, \mathfrak{w}_y\,,\, \mathfrak{w}_x\,). \tag{I.4}$$

Das $\Omega^{\alpha\beta}$ - Glied von (I.1), das mit Notwendigkeit aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgt, ist von grösster physikalischer Wichtigkeit.

Die Gleichungen (I.1) ersetzen wir durch ihre nichtrelativistische Approximation. Diese entsteht dadurch, dass wir Grössen von der Ordnüng $\frac{v}{c}$ (v—Geschwindigkeit des Schwerpunkts, $c = 3.10^{10}\ cm\ sec^{-1}$) vernachlässigen.

Den Drehimpuls $\Omega^{\alpha\beta}$ wollen wir dabei als konstant ansehen; die Gleichungen (I.2) ergeben nämlich, in nichtrelativistischer Approximation,

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{1}{c^2}\,[\,[\mathfrak{w}\,\dot{\mathfrak{v}}]\mathfrak{w}] \tag{I.5}$$

(eckige Klammern bedeuten Vektorprodukte, *Zeit*differentiation wird durch einen Punkt angedeutet), und die rechte Seite verschwindet beim Grenzübergang $\frac{v}{c} = 0$. Jetzt sind $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}$ (Geschwindigkeit des Schwerpunkts) Vektoren im Raume.

Wir betrachten zuerst ein ungeladenes Teilchen ($P^\alpha = 0$). Die Gleichungen (I.1) ergeben dann, in unserer nichtrelativistischen Approximation:

$$M\dot{\mathfrak{v}} - \frac{1}{c^2}\,[\mathfrak{w}\,\ddot{\mathfrak{v}}] = 0. \tag{I.6}$$

Ziehen wir nun die z-Achse in der Richtung des konstanten $\mathfrak{w}$-Vektors, so lauten die Gleichungen (I.6) in den 3 Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= -k\ddot{v}_y, \\ \dot{v}_y &= k\ddot{v}_x, \\ \dot{v}_z &= 0, \quad \frac{1}{k} = \frac{Mc^2}{\Omega}, \quad \Omega = |\mathfrak{w}|. \end{aligned}\right\} \tag{I.7}$$

Die zwei ersten Gleichungen ergeben

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x + k^2\ddot{v}_x &= 0, \\ \dot{v}_y + k^2\ddot{v}_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I.8}$$

Die dritte der Gleichungen (I.7) bedeutet, dass eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in der z-Richtung stattfindet. Sehen wir von dieser unwesentlichen Bewegung ab, so bleibt der Schwerpunkt während seiner Bewegung in der xy-Ebene, und man erhält, indem man die Integrale von (I.8) (mit je 2 willkürlichen Konstanten) in (I.7) einsetzt, eine Lösung mit 2 Konstanten:

$$\dot{v}_x = a \sin\left(\frac{t}{k} + \alpha\right),$$

$$\dot{v}_y = a \cos\left(\frac{t}{k} + \alpha\right), \quad z = 0.$$

Die Amplitude a und der Anfangswinkel α sind willkürliche Konstanten. Der Schwerpunkt beschreibt gleichmässig einen Kreis mit der Periode

$$\Theta = 2\pi k.$$

Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin 2\pi \frac{t}{\Theta}, \\ y &= A \cos 2\pi \frac{t}{\Theta}. \end{aligned}\right\} \tag{I.9}$$

A ist eine willkürliche Konstante. Den Anfangswinkel α und eine gleichmässige Bewegung in der xy-Ebene lassen wir als unwesentlich weg. Die Frequenz beträgt

$$\boxed{\nu = \frac{1}{\Theta} = \frac{Mc^2}{2\pi\Omega}.} \tag{I.10}$$

Der Schwerpunkt eines isolierten ungeladenen Teilchens, welches einen Drehimpuls besitzt, führt eine Kreisbewegung aus mit der Fre-

quenz ν (wenn man von einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung absieht). Der Radius des Kreises ist willkürlich, die Ebene zum konstanten Drehimpuls orthogonal. *

Für ein Elektron finden wir eine *Zitterbewegung*, d. h., eine periodische Bewegung von hoher Frequenz. Ist

$$\Omega = \frac{h}{4\pi} \qquad \text{(I.11)}$$

(im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass sich dieser Wert aus der Zitterbewegung selbst ergibt), so ist

$$\boxed{\nu = \frac{2Mc^2}{h}, \ \Theta = \frac{h}{2Mc^2}.} \qquad \text{(I.12)}$$

Die Kraft P^α in (I.1) ist die Summe zweier Kräfte: der Wirkung, die auf unser Elektron alle übrigen Elektronen ausüben, und der Rückwirkung der Eigenstrahlung des Elektrons. Wir berücksichtigen die (auf ihre nichtrelativistische Approximation zurückgeführte) Rückwirkungskraft, indem wir (I.7) durch folgendes System ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} \dot v_x &= -k\ddot v_y - q\ddot v_x, \\ \dot v_y &= k\ddot v_x - q\ddot v_y, \\ \dot v_z &= -q\ddot v_z, \\ q &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{Mc^2} \ (e = \text{Ladung}). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.13)}$$

Wir wollen wiederum von einer Bewegung in der z-Richtung, die gegen eine gleichmässige Bewegung (oder Ruhe) konvergiert, absehen. Dann erfolgt die Bewegung in der xy-Ebene, das Integralsystem von (I.13) enthält eine Amplitude a und einen Anfangswinkel α als willkürliche Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} \dot v_x &= ae^{-\beta t} \sin\left(\frac{t}{k'} + \alpha\right) \\ \dot v_y &= ae^{-\beta t} \cos\left(\frac{t}{k'} + \alpha\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.14)}$$

Setzt man (I.14) in (I.13) ein, so erhält man für k' und β die Gleichungen

---

* Ω ist der Drehimpuls *um den Schwerpunkt.*

$$\frac{k}{k'} + q\beta = 1,$$

$$-\frac{q}{k'} + k\beta = 0,$$

woher

$$k' = k\left(1 + \frac{q^2}{k^2}\right), \quad \beta = \frac{q}{q^2 + k^2}. \tag{I.15}$$

Die Frequenz beträgt jetzt

$$\nu' = \frac{1}{2\pi k'} = \nu\left(1 - \frac{q^2}{k^2} + \ldots\right) \tag{I.16}$$

und ist für das Elektron, für welches $\left(\frac{q}{k}\right)^2 = \frac{16}{9}\left(\frac{2\pi e^2}{hc}\right)^2$ ist, von der Frequenz (I.10) sehr wenig verschieden. Zweimalige Integration von (I.14) ergibt die Bahnkurve, die (bis auf eine gleichförmige geradlinige Bewegung) einer abklingenden Zitterbewegung von der Frequenz ν' entspricht. Anfangsamplitude und Anfangswinkel sind willkürlich, Frequenz und Abklingungskoeffizient drücken sich durch die Konstanten des Elektrons aus. Der vom Punkte $x = y = 0$ gezogene Radiusvektor führt eine *gleichmässige* Rotation aus, ebenso wie im Falle der ungedämpften Bewegung (I.9):

$$\text{Der Phasenwinkel } \varphi - \varphi_0 = \frac{2\pi t}{\Theta} = 2\pi\nu t. \tag{I.17}$$

Das kontinuierliche β-Spektrum. Für die Energie eines freien, nichtstrahlenden Elektrons haben wir den Erhaltungssatz:

$$\frac{c^2 M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]\,\dot{\mathfrak{v}}}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = const. \tag{I.18}$$

Wir wollen das zweite Glied rechts, die Beschleunigungsenergie E_Ω, der Grössenordnung nach bestimmen. Es sei $v \ll c$ (langsame Elektronen).

$$\pm E_\Omega = \frac{h}{4\pi} \frac{(2\pi\nu)^3 r^2}{c^2} = \frac{16\pi^2}{h^2} M^3 c^4 r^2. \tag{I.19}$$

Für Zitterbewegung, die einer Geschwindigkeit $v = 2\pi\nu r = \frac{1}{3}c$ entspricht, ist $r = \frac{h}{12\pi Mc}$, mithin

$$\pm E_\Omega = \frac{Mc^2}{9}\ erg.$$

Durch diese Schätzung (die für grosse Geschwindigkeiten durch eine relativistische Rechnung zu ergänzen wäre) wird man auf folgende Überlegung geführt. Haben die β-Elektronen bei ihrer Bildung aus dem Kern alle die nämliche Gesamtenergie (kinetische + Beschleunigungsenergie), so heisst es nicht, dass sie die nämliche kinetische Energie haben, denn die Beschleunigungsenergie wird bei verschiedenen Elektronen verschieden sein. Infolge der Ausstrahlung werden sie ihre Beschleunigung allmählich verlieren und sich einer Bewegung mit konstanten *verschiedenen* Geschwindigkeiten asymptotisch nähern.

II. DE BROGLIE-*Wellen und Quantengesetze in kinematischer Beleuchtung*

Unsere Behandlung der Zitterbewegung war unrelativistisch, wir setzten ja voraus, dass $\frac{v}{c}$ klein ist in einem Koordinatensystem, in welchem das Schwingungszentrum ruht. Unsere Grundgleichungen sind aber vom Hause aus relativistisch, die Übertragung unserer Resultate auf beliebige LORENTZsche Koordinatensysteme muss mithin nach den Gesetzen der Relativitätstheorie erfolgen. Sind x, y, z, t die Weltkoordinaten in einem LORENTZschen System, in welchem das Schwingungszentrum sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, so wird man anstatt (I.17) die Formel

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi\nu s = 2\pi\frac{s}{\Theta} \tag{II.1}$$

haben, in welcher s die (von irgendeinem Anfangspunkt gemessene) *Eigenzeit* des Schwingungszentrums ist. Der Winkel φ ist in einem *mitbewegten*, immer sich selbst parallel bleibenden Koordinatensystem zu messen. $e^{i\varphi}$ nennen wir die *Phase* der Zitterbewegung. Für das Element der Eigenzeit des Schwingungszentrums haben wir die folgende Formel, die bis auf die Grössenordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^4$ richtig ist (v bedeutet jetzt die Geschwindigkeit des Schwingungszentrums):

$$ds = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = dt - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}dt.$$

Wegen

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt,$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2,$$

ist also

$$ds = dt - \frac{1}{2c^2}(v_x dx + v_y dy + v_z dz). \tag{II.2}$$

Die Differenz der Phasenwinkel in zwei Weltpunkten beträgt demnach, da die Komponenten der Geschwindigkeit konstant bleiben:

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{2\pi(s - s_1)}{\Theta} = 2\pi\frac{t - t_1}{\Theta} - \frac{\pi}{\Theta c^2}[v_x(x - x_1) + $$

$$+ v_y(y - y_1) + v_z(z - z_1)].$$

Es sei nun die Gerade, auf welcher sich das Schwingungszentrum im Raume bewegt, mit äquidistanten Punkten bedeckt; der Grundabstand sei λ. Wir fragen: bei welchem kleinstem λ ist die Phase eine eindeutige Funktion der Lage innerhalb eines Elementarintervalls? Dabei soll der raumabhängige Bestandteil des Phasenwinkels in der letzten Formel als vom zeitabhängigen Bestandteil unabhängig betrachtet werden. Die Antwort ist klar: für zwei nächsten Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), die innerhalb ihrer Maschen einander entsprechen, also um λ voreinander entfernt sind, soll

$$\frac{v_x(x - x_1) + v_y(y - y_1) + v_z(z - z_1)}{2c^2\Theta} = \frac{v\lambda}{2c^2\Theta} = 1$$

sein. Das ergibt, wegen (I.12),

$$\lambda = \frac{h}{Mv}. \tag{II.3}$$

So gewinnen wir eine einfache Erklärung der DE BROGLIEschen Welle. *Die Differenz zwischen Systemzeit und Eigenzeit wächst um je eine Periode Θ, während das Schwingungszentrum den Weg λ zurücklegt.* Das lässt sich aus (II.2) unmittelbar ablesen.

Wirkt auf das Elektron ein Kraftfeld, so nehmen wir an, dass die Zitterbewegung, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, in welchem das Schwingungszentrum momentan ruht, mit genügender Genauigkeit durch die Bewegung (I.9) ersetzt werden kann, während einer kurzen, aber viele Eigenperioden Θ enthaltenden Zeit. Wir nehmen weiter an, dass die Schwingungsebene während der Bewegung sich selbst parallel bleibt, so dass die Lage des Elektrons, bei gegebener Lage des Schwingungszentrums, durch den Phasenwinkel allein bestimmt wird. Die Kraft, die nötig wäre, um die Zitterbewegung mit der Frequenz $\frac{2Mc^2}{h}$ hervorzurufen, ist sehr gross im Vergleich zu den Kräften, die innerhalb des Atoms auf die Elektronen wirken, und es scheint natürlich, dass wir den Einfluss der Atomkräfte auf die Eigenperiode ausser Acht lassen. Die Zitterbewegung ist dann dem Gang der relativitätstheoretischen Uhr ähnlich. In der Eigenzeit des Schwingungszentrums gemessen ist die Frequenz konstant. Für

e Phasenwinkel haben wir demnach die Formel (II.1). Durch diesen Antz, der einer nicht abklingenden Zitterbewegung entspricht, wird die ewegung in einer „teilweise integrierten" Form dargestellt. Das noch zu estimmende ist jetzt die Bahn des Schwingungszentrums. Das bezügliche roblem ist dynamischer Natur, wir wollen es in einer folgenden Arbeit ı etwas anderer Form) angreifen. Aber schon jetzt können wir folgendes ststellen.

ATZ. *Die Quantengesetze für die Bewegung des Schwingungszentrums:*

$$\oint \mathrm{d}S = nh, \quad \mathrm{d}S = M(v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y + v_z\,\mathrm{d}z) \qquad \text{(II.4)}$$

aben zur Folge, dass (bis auf relativistische Korrektionen) die Phase er Zitterbewegung eine eindeutige Funktion der Zustandskoordinaten x, y, z, v_x, v_y, v_z *des Schwingunszentrums ist.*

Wir setzen voraus, dass das Schwingungszentrum während seiner ewegung in denselben Punkt seiner Bahn im Zustandsraum unendlich oft viederkehrt, oder wenigstens jedem Punkte seiner Bahn unendlich oft beebig nahe kommt *(periodische oder quasiperiodische Bewegung).*

Beweis. Für die Quantengesetze (II.4) wollen wir die weiteste Deuung annehmen: das Integral soll für jeden im Zustandsraum geschlosseen Weg ein ganzes Vielfaches von h sein [man befreit sich durch diese ormulierung von der Voraussetzung, dass es Separationsvariablen gibt, ür welche die Quantenbedingungen (II.4) einzeln gelten. Der Integrationsveg braucht dabei keine wirkliche vom Schwingungszentrum im Zustandsaum durchlaufene Bahn zu sein,—falls die Bewegungsgleichungen in kanoischer Form vorliegen, was wir nicht vorauszusetzen brauchen]. Dann esagt aber das Quantengesetz:

$$F(P) = e^{-\frac{2\pi i}{h}S} \quad \text{eindeutig} \qquad \left(S = \int_{P_0}^{P} \mathrm{d}S\right); \qquad \text{(II.5)}$$

. h., als Funktion des variablen Zustandspunkts P betrachtet, ist F im ustandsraum eindeutig.

Für das Element ds der Eigenzeit des Schwingungszentrums haben ir nach Formel (II.2), bis auf $\left(\frac{v}{c}\right)^4$ genau:

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}S}{2Mc^2}, \qquad \text{(II.6)}$$

wobei dS nach (II.4) definiert ist. Für die Differenz der Phasenwinkel in den Punkten P_0 und P der Bahn im Zustandsraum erhalten wir somit, indem wir längs der Bahn integrieren:

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi \int_{P_0}^{P} \frac{ds}{\Theta} = \frac{4\pi Mc^2}{h}(t - t_0) - \frac{2\pi}{h}\int_{P_0}^{P} dS. \qquad \text{(II.7)}$$

Die Phase ist durch

$$e^{i(\varphi - \varphi_0)} = F(P) e^{\frac{4\pi i Mc^2}{h}(t - t_0)} \qquad \text{(II.8)}$$

gegeben, und unser Satz ergibt sich aus (II.5).

Der Satz kann auf mehrere Elektronen ohne weiteres ausgedehnt werden.

Im Falle eines Gitterfeldes wird man, anstatt von einer Rückkehr in denselben Zustandspunkt, von einem Durchgang durch gleichliegende Punkte in verschiedenen Zellen sprechen müssen. In der Formel (II.7) werden dann die auf die jeweilige Zelle bezogenen Koordinaten vorkommen (die für gleichliegende Punkte gleich sind).

Die Quantengesetze (II.4) hängen mit der rein kinematisch aufgefassten Eindeutigkeitsforderung zusammen, ohne dass irgendwelche dynamische Gleichungen vorausgesetzt seien. Nimmt man noch die NEWTONsche Dynamik hinzu, so erhält man das BOHRsche Quantelungsschema.

Um zu (II.4) zu kommen, sehen wir uns genötigt, $\frac{2Mc^2}{h}$ als die Eigenfrequenz des Elektrons einzuführen. *Daraus ergibt sich aber, nach (I.10), für den Drehimpuls der Wert* $\frac{h}{4\pi}$.

Durch die Formel (II.4), erscheint zum zweitenmal die Relativitätstheorie als grundsätzliche Vorbedingung der Quantentheorie (die erste grundsätzliche quantenmechanische Konsequenz der Relativitätstheorie ist die Zitterbewegung selbst; ihr Differentialgesetz konnte nur aus der speziellen Relativitätstheorie und der Gravitationstheorie gewonnen werden). Im Quantengesetz (II.4) kommt der relativistische Unterschied zwischen Eigenzeit und Systemzeit zur Geltung; das Gesetz kann dahin formuliert werden, dass bei jeder vollen Umkreisung die Eigenzeit gegen die Systemzeit um eine, zwei, drei usf. Eigenperioden zurückbleibt. Die Phase, die das Schwingungszentrum mit sich mitführt, nimmt nach (II.8), im Laufe der Zeit, Werte an, die einer *stehenden Welle* im Zustandsraum gehören. *F(P)* gibt die Phasenverschiebung im Punkte P gegen eine Schwingung des ganzen Zustandsraums, die mit der Frequenz $\frac{2Mc^2}{h}$ erfolgt.

Neben den ein-, zwei-, n-quantigen Zuständen werden vielleicht noch diejenigen physikalisch realisiert, bei welchen die Umkreisung des Schwingungszentrums sich im Takt der Eigenfrequenz selbst vollzieht.

Die Zitterbewegung erfährt eine starke Dämpfung. Es ist nämlich, nach (I.15), wenn man q^2 neben k^2 vernachlässigt, die Dämpfungskonstante

$$\beta = \frac{q}{k^2} = \frac{8\pi}{3}\alpha\nu; \tag{II.9}$$

α und ν sind die Feinstrukturkonstante und die Eigenfrequenz:

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \cong \frac{1}{137}, \quad \nu = \frac{2Mc^2}{h}.$$

Wir nehmen an, dass die Zitterbewegung beständig durch die umgebende Strahlung angeregt wird. Die Resonanzfrequenz des Elektrons ist im umgebenden Strahlungsfeld immer vorhanden; sie ist durch eine im allgemeinen geringe, aber für die Anregung einer geringen Zitteramplitude hinreichende, Intensität repräsentiert, das dürfen wir annehmen.

Streszczenie

Nowe równania dynamiki, podane przez autora, po scałkowaniu w wypadku elektronu swobodnego dają ruch jednostajny po kole o częstości $\nu = \frac{Mc^2}{2\pi\Omega}$ (M masa, Ω moment obrotu względem środka masy).

Gdy ruch odbywa się w polu zewnętrznym i jest quasiperiodyczny, wówczas faza drgania kołowego nie jest naogół funkcją jednoznaczną współrzędnych i prędkości elektronu. Warunki kwantowe BOHRA-SOMMERFELDA są warunkiem dostatecznym jednoznaczności fazy. Pojmowane w ten sposób, wymagają one przyjęcia wartości $\frac{h}{4\pi}$ dla momentu obrotu względem środka masy.

Action du champ magnétique sur l'absorption de la vapeur de sélénium (Se_2)

Wpływ pola magnetycznego na absorbcję pary selenu (Se_2)

Par St. ROUPPERT, Institut de Physique Expérimentale de l'Université Joseph Piłsudski à Varsovie

(Manuscrit reçu le 14. Juillet 1937)

On a examiné l'action du champ magnétique sur l'absorption de la vapeur de sélénium. On a constaté que toutes les bandes observées (de 0-8 à 0-22 et 1-7, 1-8, 1-9) subissent un renforcement, plus faible cependant que celui des bandes d'absorption du soufre.

Il paraît que, tout au contraire que dans le cas du soufre, les bandes subissant la prédissociation naturelle sont renforcées par le champ.

On n'a pas pu definir précisément l'influence de l'augmentation, sous l'action du champ, de l'absorption continue, qui en partie se superpose sur les bandes de sélénium.

Le phénomène de l'extinction de la fluorescence par le champ magnétique a été découvert en 1913 par M. STEUBING (*11*) pour la vapeur d'iode (I_2). Plus tard une influence analogue du champ magnétique sur la fluorescence a été trouvée par M. SMOLUCHOWSKI (*10*) pour le tellure (Te_2) et par M. GENARD (*2*) pour le soufre (S_2) et pour le sélénium (Se_2).

En 1929 M. OLDENBERG (*5*) étudia l'action du champ magnétique sur les bandes d'absorption de l'iode (I_2), mais il n'a trouvé aucun changement des intensités. En 1936 M. GENARD (*3*) a étudié l'action du champ magnétique sur l'absorption du soufre (S_2).

Le spectre d'absorption de la vapeur de S_2 a été étudié dans le domaine entre 3300—2400 Å par MM. CHRISTY et NAUDÉ (*1*); il présente deux régions de prédissociation naturelle à 2790 Å et 2615 Å (v'=10,11, ...). Les bandes entre 3300—2799 Å ont cependant une structure rotationnelle bien nette et c'est surtout ce domaine qui est intéressant.

L' étude effectuée par M. GENARD avec un champ de 25.500 Gauss a donné des résultats positifs. Dans le domaine de prédissociation naturelle et au delà aucune modification de l'absorption n'a été constatée, mais

dans les bandes précédant la prédissociation ($\lambda > 2790$ Å) on a pu observer une forte augmentation de l'absorption.

On a pu remarquer que l'action du champ magnétique cesse au niveau $v' = 9$ qui est le dernier avant la prédissociation naturelle. MM. KONDRATJEW et OLSSON (*4*) qui ont étudié l'influence des gaz étrangers sur l'absorption du soufre, ont obtenu des résultats analogues. Le renforcement de l'absorption à la suite des collisions avec N_2 commence aussi au niveau $v' = 9$.

Dans un travail récent, M. OLSSON (*7*) communique les résultats d'une étude concernant l'action du champ magnétique sur l'absorption de la vapeur de tellure. Il constate que le champ magnétique renforce certaines bandes plus que les autres. En utilisant dans ses recherches un spectrographe à dispersion moyenne, il a constaté que, sous l'influence du champ, les bandes deviennent plus diffuses. Cet effet a été observé pour les bandes de $v' = 5$ à $v' = 15$.

Le but de mon travail était d'étudier l'action du champ magnétique sur l'absorption de la vapeur de sélénium (Se_2). Comme M. GENARD l'a montré, les séries de résonance de cette vapeur sont les unes affaiblies, les autres renforcées sous l'action du champ magnétique.

Mon dispositif expérimental était analogue à celui employé par M. GENARD pour l'examen de l'action du champ magnétique sur l'absorption du soufre. Le champ magnétique utilisé produit par le grand électro-aimant de l'Institut de Physique Expérimentale de l'Université J. P. à Varsovie s'élevait à 24.400 Gauss. La vapeur de sélénium était contenue dans une ampoule en silice ayant la forme d'un cylindre, de 18 *mm* de longueur et de 10 *mm* de diamètre, à laquelle était soudée une branche en forme de tube, de 3 *mm* de diamètre et de 160 *mm* de longueur. Cette ampoule était placée dans un four spécial, composé d'un cylindre de cuivre, avec une coupure pour y placer la branche latérale, et recouvert d'une couche d'amiante sur laquelle étaient enroulés les fils de chauffage. Le four maintenait la vapeur à une température de 615^0 à $630^0 C$. La branche de la cuve d'absorption était placée dans un four supplémentaire; la pression de la vapeur correspondait à celle de la vapeur saturée à la température de 447 à $486^0 C$, c.-à-d. elle s'élevait de 13 *mm* jusqu'à 31 *mm Hg*. Comme source de lumière, donnant un fond continu ultra-violet, j'ai employé une lampe à hydrogène, refroidie à l'eau, alimentée par un courant de 0,35 *Amp* sous une tension de 5.000 volts. Pour la prise des clichés des spectres d'absorption je me suis servi d'un spectrographe PELLIN, de dispersion 18 Å/*mm* au voisinage de 3200 Å; avec cette dispersion les bandes n'étaient naturellement pas résolues, je n'ai donc pu qu'examiner l'absorption totale dans les bandes. Sur chaque cliché était photographié un spectre obtenu sans action du champ, ensuite un spectre lorsque le champ était de 24.400 Gauss et enfin de nouveau un

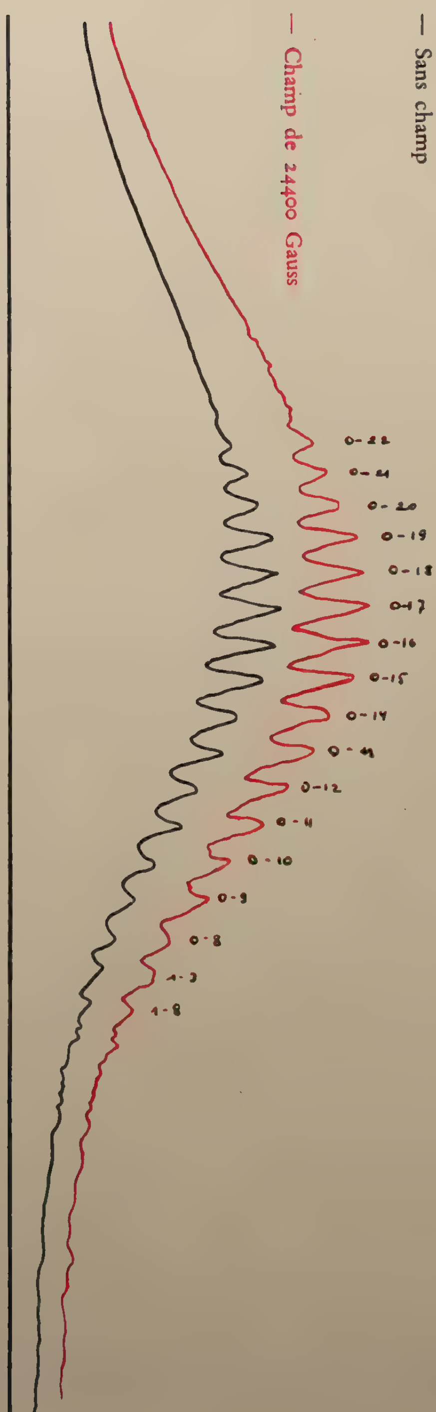


Fig. 1a. Température de la vapeur : 615°C; pression : 20,6 *mm Hg*

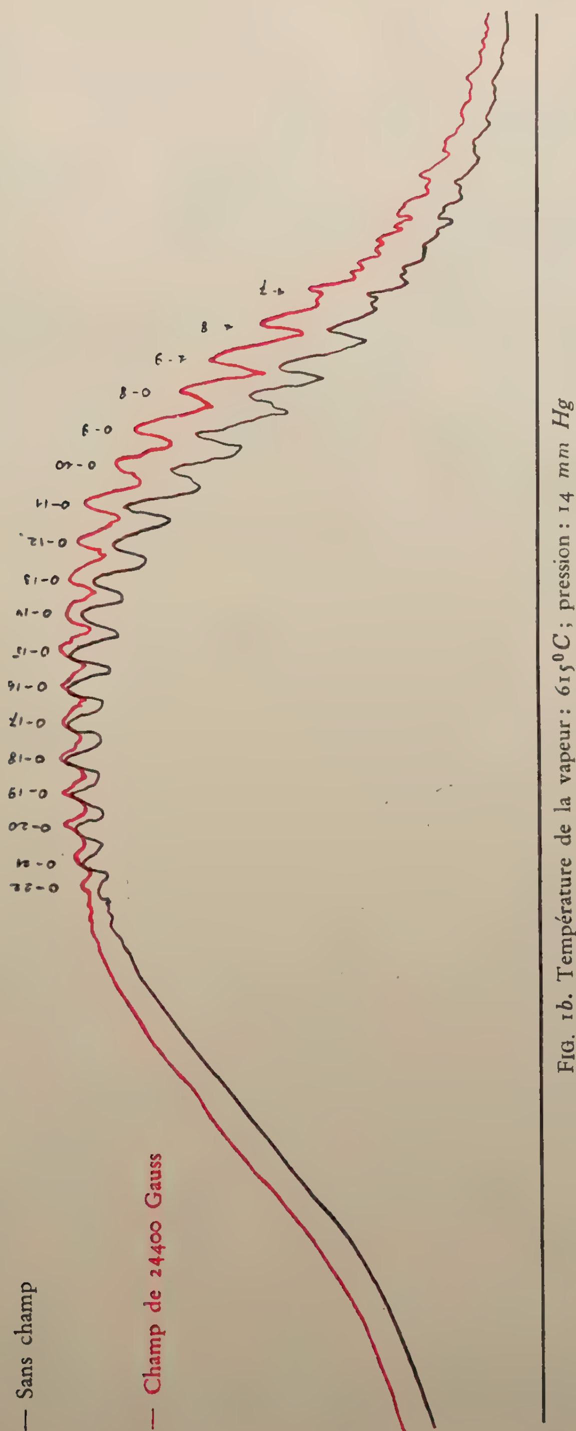


FIG. 1*b*. Température de la vapeur : $615^0 C$; pression : 14 *mm Hg*

spectre, le champ magnétique étant supprimé. On n'a pris en considération que les clichés pour lesquelles enregistrements microphotométriques du premier et du dernier spectre étaient tout à fait identiques. La durée d'exposition était de 6 minutes environ.

J'ai observé les bandes de 0-8 à 0-22 et 1-7, 1-8, 1-9; toutes ces bandes ont montré une augmentation d'absorption à la suite de l'action du champ magnétique. Les courbes d'enregistrement de la fig. 1 (*a*, *b*) en donnent la meilleure preuve.

Les courbes montrent que sous des pressions plus élevées de la vapeur de sélénium, les bandes du côté des ondes courtes sont tellement intenses que le fond est entièrement absorbé; dans ces bandes on ne peut donc naturellement pas observer d'augmentation de l'absorption; sous des pressions plus élevées on constate aussi une forte absorption continue qui ne permet d'observer que les bandes du côté des ondes plus longues.

Le spectre d'absorption de la vapeur de Se_2 a été étudié par plusieurs savants. M. OLSSON (*6*) a démontré que le système central des bandes provient du passage $^1\Sigma—^1\Sigma$.

Dans le spectre des vapeurs de sélénium (Se_2) apparaît la prédissociation naturelle; la bande 0-10 (28510 cm^{-1}) est la dernière avant le domaine de prédissociation; dans cette bande, pour $J > 49$, la structure rotationnelle disparaît. Les séries à nombre quantique $v' \geqslant 11$ n'apparaissent pas dans l'émission. Le point de croisement de la courbe potentielle de l'état $^1\Sigma_u^-$ avec la courbe perturbatrice se trouve vers 28690 cm^{-1}.

En comparant l'influence du champ magnétique sur l'absorption du soufre et du sélénium, on voit que l'action du champ sur l'absorption du soufre est plus forte. Dans le cas du soufre, les niveaux subissant normalement la prédissociation ne subissent pas l'action du champ magnétique, tandis que dans le sélénium toutes les bandes semblent subir une augmentation d'intensité, mais on ne peut pas séparer l'influence de l'augmentation, sous l'action du champ magnétique, de l'absorption continue, qui en partie se superpose sur les bandes.

Si, outre les faits établis ici, on se rappelle que dans l'émission certaines séries de résonance sont éteintes par le champ magnétique, tandis que les autres sont renforcées, on est conduit à chercher l'explication de ces actions du champ magnétique dans les perturbations induites.

Selon M. ROSEN (*9*) tous les phénomènes se manifestant dans le spectre du sélénium (Se_2) peuvent être expliqués par le schéma des courbes potentielles suivant (fig. 2).

Le point de croisement des courbes a et a_1 correspondrait à la prédissociation naturelle à 28700 cm^{-1}.

Pour expliquer l'absence de la prédissociation naturelle, analogue au premier domaine de la prédissociation plus faible dans le soufre, M. RO-

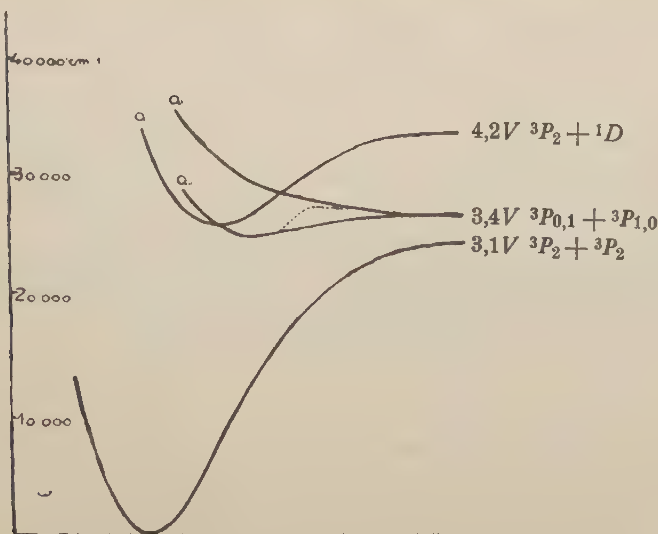


FIG. 2

SEN admet que le point d'intersection des courbes a et $a_{,,}$ a lieu à proximité du minimum de la courbe a, où, selon le modèle classique, les atomes ont la plus grande vitesse. Il admet que la courbe $a_{,,}$ possède un maximum; l'existence de ce maximum expliquerait: les perturbations naturelles pour les niveaux v' pas trop élevés, les perturbations induites, ainsi que l'extinction par collisions des séries de résonance.

Pour les molécules excitées, il existerait une certaine probabilité du passage sur la courbe $a_{,,}$ de la dissociation. Une partie des molécules pourrait cependant rayonner de la courbe $a_{,,}$ et ceci peut être la cause de l'apparition du fond continu, s'étendant de 3700 Å vers la partie visible du spectre, lequel, selon M. ROMPE *(8)*, accompagne l'extinction par collisions des séries de résonance du sélénium.

En terminant, je tiens à remercier chaleureusement M. le Prof. Dr. S. PIEŃKOWSKI, sous la direction duquel ce travail a été exécuté, pour les précieux conseils et indications qu'il a bien voulu me donner. Je remercie également M. le Chargé de cours Dr. W. KAPUŚCIŃSKI et M. le Chargé de cours Dr. A. JABŁOŃSKI pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Streszczenie

Badając wpływ pola magnetycznego na absorbcję siarki GENARD wykrył, że pasma pochłaniania poprzedzające predysocjację naturalną zostały wzmocnione ($\lambda > 2790$). Niedawno OLSSON znalazł analogiczny wpływ pola na absorbcję telluru: pole wzmacnia pasma absorbcyjne.

Stosując aparaturę analogiczną do aparatury GENARDA badałem wpływ pola magnetycznego na absorbcję pary selenu. Wszystkie obserwowane pasma (od 0-8 do 0-22 i 1-7, 1-8, 1-9) ulegają wzmocnieniu, nie tak silnemu jednak, jak pasma siarki. W widmie selenu występuje także wpływ wzmocnienia, pod działaniem pola, absorpcji ciągłej, nakładającej się częściowo na pasma; wpływ ten jednak nie daje się oddzielić.

W siarce pasma, ulegające naturalnej predysocjacji, nie ulegają wpływowi pola, gdy w selenie wydaje się, że pasma, ulegające naturalnej predysocjacji, są jednak wzmacniane przez pole magnetyczne.

Bibliographie

1. CHRISTY, A. and NAUDE. S.: *Phys. Rev.* **37**, 903 (1931).
2. GENARD, J.: *Physica* **1**, 849 (1934); **2**, 328 (1935).
3. GENARD, J.: *Physica* **3**, 125 (1936).
4. KONDRATJEW, W. und OLSSON, E.: *ZS. f. Phys.* **99**, 671 (1936).
5. OLDENBERG, O.: *ZS. f. Phys.* **57**, 186 (1929).
6. OLSSON, E.: *ZS. f. Phys.* **90**, 138 (1934).
7. OLSSON, E.: *C. R.* **204**, 1182 (1937).
8. ROMPE, R.: *ZS. f. Phys.* **65**, 404 (1930).
9. ROSEN, B.: *Acta Phys. Pol.* **5**, 193 (1936).
10. SMOLUCHOWSKI, R.: *ZS. f. Phys.* **85**, 192 (1933).
11. STEUBING, W.: *Verh. d. D. Phys. Ges.* **15**, 1181 (1913).

Fluorescence des solutions de para-para-dioxydi-cinnamoylméthane

Fluorescencja roztworów para-para-dwuoksydwucynamoilmetanu

Par Kazimiera MORKOWSKA, Varsovie, Institut de Physique Expérimentale de l'Université de Joseph Piłsudski

(Manuscrit reçu le 14. Juillet 1937)

Les études de fluorescence et d'absorption de colorants montrent que les spectres sont influencés fortement par la nature du solvant, la température, la façon d'excitation et autres.

On a examiné l'influence de ces agents sur le spectre de dioxydicinnamoylméthane et on a constaté que pour excitations dans les divers parties du spectre d'absorption il n' y a pas de changement de la répartition des intensités dans le spectre de fluorescence.

Pour une serie de divers solutions on a observé dans le spectre de fluorescence les changements de la répartition d'intensité ainsi que le déplacement de bandes vers les ondes longues qui semble être en relation avec l'augmentation de la constante diélectrique du solvant.

Dans la température d'air liquide les bandes de fluorescence subissent de déplacements qui ne montrent aucune régularité.

L'étude de la photoluminescence de divers composés organiques, surtout de colorants, a montré que l'émission de ces substances est en rapport étroit avec l'existence dans la molécule de groupes d'atomes qui déterminent la structure et la répartition des intensités dans les spectres. On a constaté en outre que l'aspect des bandes dépend considérablement des qualités du solvant dans lequel se trouvent les molécules du colorant.

Le présent travail a pour but l'étude des spectres de fluorescence et d'absorption des solutions du colorant p_2-dioxydicinnamoylméthane, la détermination des longueurs d'onde correspondant aux maxima d'intensité des bandes et l'examen de l'influence de la température et de la nature du solvant sur la structure des spectres.

La molécule de p_2-dioxydicinnamoylméthane se compose de deux groupes d'atomes identiques joints par le groupe CH_2 et terminés par des

chaînes benzéniques, dans lesquelles un atome d'hydrogène (celui qui occupe la position *para*) est remplacé par le groupe *OH*:

OH—
—*CH* = *CH* — *CO*
CH_2
— *CH* = *CH* — *CO*
OH—

A la température de 20°*C* le composé pulvérisé a une couleur orange et les solutions dans divers liquides de faibles concentrations sont jaunes.

1. Pour étudier la fluorescence de la solution benzénique on a employé comme source excitatrice un arc à électrodes de charbon, dont la lumière était concentrée par une lentille en quartz; la solution était contenue dans un vase rectangulaire, muni d'une fenêtre en quartz. On projetait la lumière du faisceau dans la solution à l'aide d'une autre lentille sur la fente d'un spectrographe de FUESS, à optique de verre, dont la dispersion était d'environ 30 Å par *mm* dans la partie du spectre près de 4500 Å.

Entre la source de la lumière et le vase on plaçait un filtre du verre de WOOD absorbant le rayonnement visible de longueur d'onde dépassant 4200 Å, c'est-à-dire celui du domaine où s'étend le spectre de fluorescence.

Pour examiner l'absorption, on a employé une lampe à incandescence „*Vitalux*" qui donne un spectre continu dans la partie visible du spectre et l'ultraviolet jusqu'à 2600 Å. Un faisceau parallèle de lumière traversait un vase en quartz de 5 *mm* de longueur contenant la solution et était concentré par une lentille sur la fente du spectrographe.

Le spectre de fluorescence de la solution benzénique de dioxydicinnamoylméthane est composé de deux larges bandes partiellement superposées. La bande de longueur d'onde plus grande a une intensité plus faible.

Le spectre d'absorption s'étend dans la partie visible du spectre et le proche ultraviolet; il se compose de trois bandes qui se superposent partiellement, comme dans le spectre d'émission, et d'un spectre continu s'étendant vers les ondes courtes. Les longueurs d'onde déterminées pour les bandes d'émission et d'absorption, ainsi que les résultats de Mlle E. RAKOWER (*3*) obtenus pour un composé analogue, sont réunis dans le tableau suivant.

En comparant les résultats du travail présent avec ceux de Mlle E. RAKOWER pour la solution benzénique de dicinnamoylméthane, dont la molécule ne possède pas de groupes *OH*, nons constatons une analogie complète de la structure des spectres, notamment le même nombre de bandes d'émission et d'absorption et la présence d'un spectre d'absorption continu; nons trouvons que dans le spectre du p_2-dioxydicinnamoylmé-

Tableau I

		$CH_2(CO \cdot CH{:}CH\ C_6H_4 \cdot {}_pOH)_2$	$CH_2(CO \cdot CH{:}CH \cdot C_6H_5)_2$ (3)
Fluorescence	I	4780 Å	4600 Å
	II	4540	4390
Absorption	I	4320	4140
	II	4120	3940
	III	3920	3790
Absorption continue		$\lambda < 3300$	$\lambda < 3160$

thane qui possède dans les deux chaînes benzéniques des groupes *OH*, toutes les bandes sont déplacées vers les ondes longues.

2. Pour voir si le spectre d'émission subit quelque changement lorsque l'excitation a lieu au moyen d'une lumière de longueur d'onde comprise dans l'une des trois bandes d'absorption, on a employé comme source excitatrice une lampe à mercure de M. SOŁTAN, parce que le spectre de *Hg* contient des raies dans le domaine de chacune des bandes d'absorption. En choisissant des filtres convenables on pouvait séparer partiellement le rayonnement de la lampe coincidant avec celui de la bande de longueur d'onde la plus grande ou avec celui des bandes de longueurs d'onde plus courtes. On s'est servi de deux filtres: 1) du filtre de SCHOTT - *GG 3* d'épaisseur de 1 *mm* et 2) du verre de WOOD, épaisseur 3 *mm*. Le premier filtre absorbe presque totalement les raies de la lampe qui coincident avec le domaine de la bande III et celles qui coincident avec la bande II (4078 Å et 4047 Å) dans le rapport de 90%, de sorte que l'excitation a lieu seulement dans la bande I (la raie 4358 Å est absorbée dans le rapport de 40%) et partiellement dans la bande II (10% du rayonnement des raies 4078 Å et 4047 Å). En considérant que pour la lumière non filtrée le rendement d'intensité de la raie 4358 Å est par rapport à celui de la somme des intensités de 4078 Å, 4047 Å comme 1 : 1,4, nous obtenons après l'absorption par le filtre le rapport des rendements de ces intensités égal à 1 : 0,23. Le filtre 2) ne laisse passer que les raies qui coincident avec les bandes II et III; la raie 4358 Å est absorbée totalement.

Pour ces trois façons d'excitation, sans filtre et avec les deux filtres nommés, on n'a pas observé de changement de rendement d'intensité dans le spectre de fluorescence.

Pendant l'étude de la solution benzénique on a constaté, qu'aprés de longues expositions elle s'est décolorée. Ce fait est accompagné d'un chan-

gement du spectre de fluorescence, se manifestant dans l'apparition d'une faible bande dans le domaine 4078 Å, 4047 Å qui n'existe pas dans le spectre de la solution conservée dans l'obscurité.

3. On a étudié ensuite l'influence de la nature du solvant sur la fluorescence. On sait que la présence de la fluorescence d'un colorant dans une solution dépend considérablement des qualités du solvant; dans certains solvants la fluorescence a une intensité très grande, dans d'autres elle est faible et peut même disparaître. En tenant compte du fait important quoique peu étudié que les molécules du solvant ont une influence sur celles de la substance dissoute, il faut s'attendre à ce que la position du spectre d'émission et sa structure sera aussi fortement influencée par la nature du solvant. En effet, beaucoup de colorants montrent de grands changements de la position et du caractère du spectre lorsqu'ils sont dissous dans des divers solvants. Il semble que pour certains composés c'est la constante diélectrique du solvant qui a dans ce cas une grande influence. Cette influence se manifeste en général par un déplacement des maxima d'intensité dans le spectre vers les ondes longues lorsque la constante diélectrique du solvant augmente (*2*).

Le déplacement est quelquefois grand, mais souvent il y a des exceptions; en effet pour certains composés le spectre ne subit aucun déplacement avec le changement de la constante diélectrique [(*1*), (*4*)], ou méme il subit un faible déplacement dans le sens inverse.

Dans le présent travail on a étudié la question de cette influence pour le dioxydicinnamoylméthane.

On a choisi comme solvants une série de liquides dont les constantes diélectriques diffèrent considérablement. (Dans l'eau la substance ne se dissout pas.)

Les spectres de fluorescence de ces solutions ont été photographiés au moyen d'un spectrographe en verre sur des plaques panchromatiques *Ilford*. Les courbes de noircissement obtenues avec ces clichés à l'aide d'un microphotomètre de MOLL sont données plus loin ou on discute aussi l'influence des basses températures sur la fluorescence. Les longueurs d'onde des bandes, évaluées d'après ces microphotogrammes et réunies dans le tableau II, permettent de constater que le spectre se déplace vers le rouge avec l'augmentation de la constante diélectrique du solvant. Si nous considérons les solutions dans le benzène et dans la glycérine, nous remarquons que le déplacement est très grand: le spectre donné par la première s'étend dans la partie bleue et celui de la deuxième dans la région jaune-verte. Pour les quatre premiers solvants les déplacements ne peuvent pas être constatés, les différences des constantes étant trop petites. Nous observons aussi un petit déplacement pour l'acétone, quoiqu'on pourrait s'attendre à un déplacement plus grand, la valeur de la constante étant

Tableau II

	Solvant	Densité	Const. diél.	λ	Remarques
a	Benzène	0.88	2.28	4780*, 4540 Å	* bande plus faible
	Xylène	0.87	2.57	4780*, 4540	
b	Éther éthylique	0.79	4.37	4670	
c	Chloroforme	1.49	4.95	4780	
d	Acétone	0.80	21	4800	
e	Alcool éthyl.	0.80	29.3	4880, 5370	
f	Glycérine	0.86	42.9	5000*, 5680	

considérable. Mais il faut remarquer qu'il est très difficile d'obtenir l'acétone à l'état tout à fait pur et il est possible que la faible valeur du déplacement est due à des impurités qui ont pu diminuer la valeur de la constante diélectrique.

4. En étudiant la fluorescence et l'absorption des solutions de dioxydicinnamoylméthane à la température de $-180^0 C$ on s'est servi d'un dispositif analogue à celui qui a été décrit par Mlle B. TWAROWSKA [(*4*), (*5*)].

Le tableau III contient la comparaison des longueurs d'onde des maxima des bandes de fluorescence et d'absorption de la solution dans le benzène à la température de l'air liquide avec les données pour les spectres à la température de $20^0 C$.

Tableau III

	$20^0 C$	$-180^0 C$
Fluorescence	4780 Å 4540	5550 Å
Absorption	4320 4120 3920	4780 4560 4300 4030

En comparant ces résultats, nous remarquons un grand déplacement des spectres d'émission ainsi que d'absorption vers les ondes longues avec le décroissement de la température. En même temps la structure du spectre subit un changement. Dans le spectre d'absorption à $-180^0 C$ il y a quatre

bandes, et le spectre d'émission présente une structure moins distincte. Le maximum d'intensité est déplacé vers 5500 Å.

5. Outre les spectres de la solution benzénique on a examiné aussi les spectres de toutes les autres solutions à la température de l'air liquide. On a photographié aussi les spectres des solvants purs dans les mêmes conditions. Dans la fig. 1 se trouvent les courbes microphotomètriques *a—f* des spectres de fluorescence des solutions énumérées dans le tableau II. (Courbes continues—temperature $+20^0C$; courbes en pointillé -180^0C).

Le spectre continu qui s'étend au delà de 4400 Å (il est particulièrement distinct sur les microphotogrammes *d* et *f*) et qu'on retrouve aussi

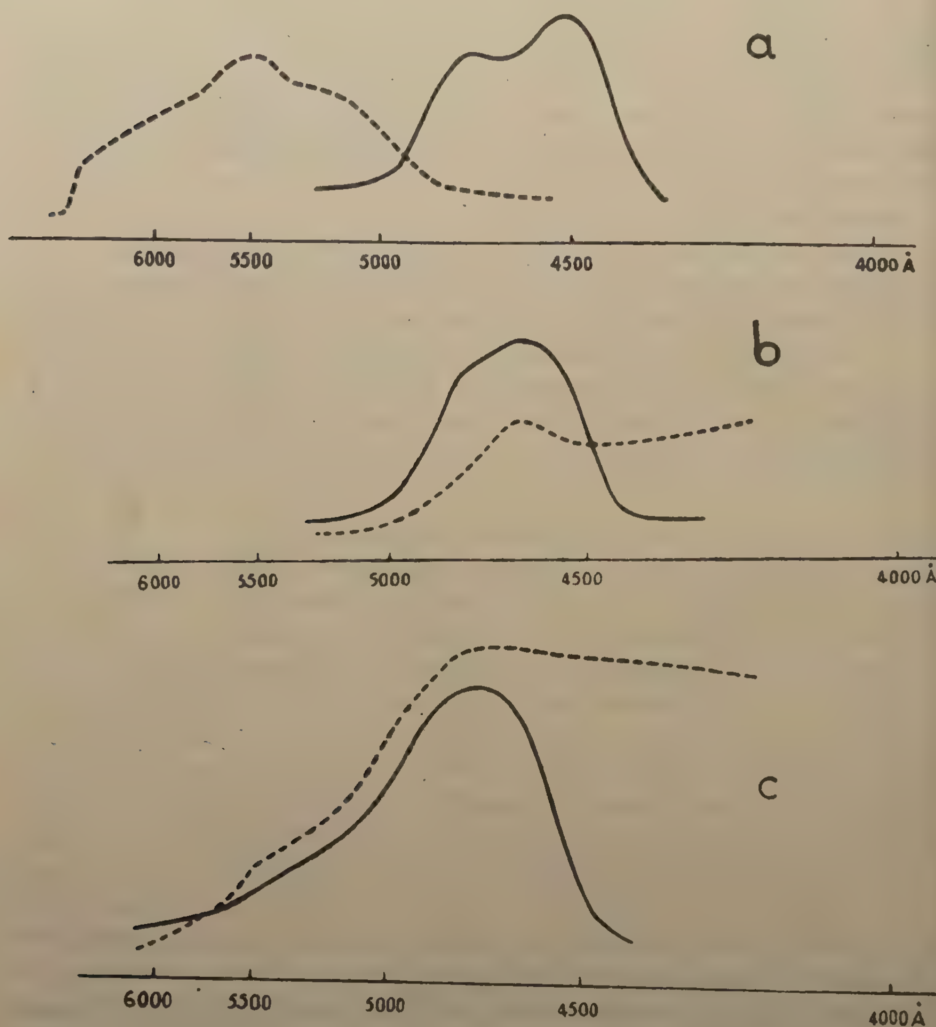


Fig. 1

sur les clichés du solvant pur est probablement dû à la fluorescence de la ouate, qui était mouillée avec la solution examinée.

La comparaison des microphotogrammes obtenus permet d'établir qu'il n'y a aucune régularité dans le changement des spectres d'émission avec la variation de la température. Pour les solvants comme le benzène, le *p*-xylène (le spectre de la solution dans le xylène est presque identique avec celui de la solution benzénique à la température de 20^0C ainsi qu'à -180^0C) on constate un grand déplacement du spectre vers le rouge. Pour les autres solvants, comme l'acétone, le chloroforme, l'éther éthylique, on n'observe presque

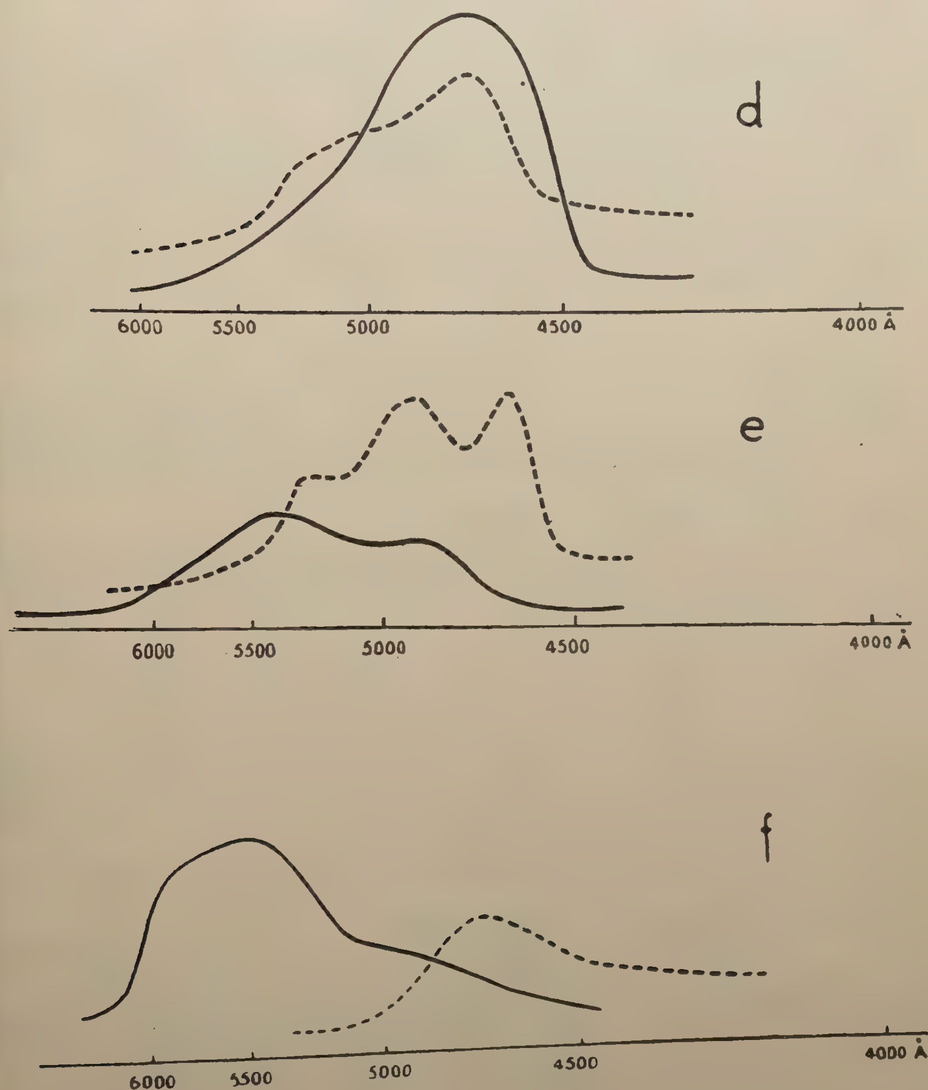


FIG. 1

pas de déplacement, enfin pour la glycérine il y a un déplacement considérable vers les ondes courtes. Dans le cas d'une solution alcoolique on remarque, outre un petit déplacement vers le violet, une augmentation du nombre des bandes.

6. Après avoir réuni les résultats se rapportant à la photoluminescence des solutions de dioxydicinnamoylméthane il semblait intéressant d'examiner l'émission de cette substance à l'état gazeux.

Dans ce but on a préparé un vase en quartz soigneusement purgé des gaz absorbés sur les parois; après y avoir introduit la substance étudiée le vase était relié à la pompe et scellé.

On examinait la fluorescence en l'excitant par la lumière d'une lampe à mercure, en même temps le composé était chauffé à la température de 300°*C* à 350°*C*. Au-dessous de cette température la fluorescence n'apparaît pas. C'est seulement au-dessus de cette température qu'on obtient un spectre continu dans la région de 4900 Å jusqu'à 3000 Å et la substance se décompose en déposant du carbone. Cette dissociation thermique s'effectue peu à peu même à des températures un peu plus élevées que la température de fusion qui est d'environ 220°*C*.

Résumé des résultats

1. On a déterminé les longueurs d'onde des maxima des bandes d'absorption et d'émission du dioxydicinnamoylméthane à la température de 20°*C*.
2. On a constaté que quand on excitait la fluorescence au moyen de la lumière, correspondant à diverses parties du spectre d'absorption, il n'y avait pas de changement de répartition d'intensité dans l'émission.
3. On a constaté un changement du spectre de fluorescence de la solution benzénique dû aux réactions photochimiques.
4. On a déterminé les longueurs d'onde des bandes de fluorescence à la température normale pour une série de solvants et on a constaté un déplacement du spectre vers le rouge avec l'augmentation de la constante diélectrique de ceux-ci.
5. On a examiné la fluorescence et l'absorption de la solution benzénique à —180°*C*.
6. On a examiné les spectres d'émission d'une série de solutions à la température de l'air liquide.
7. On a étudié la photoluminescence de cette substance à l'état gazeux et on a trouvé qu'à la température d'environ 250°*C* la substance se décompose.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à M. le

Professeur S. PIEŃKOWSKI pour avoir bien voulu diriger mon travail et pour les précieux conseils qu'il m'a prodigué pendant son exécution.

J'adresse aussi mes remerciements au Comité de la Fondation MIANOWSKI pour la subvention, grâce à laquelle j'ai pu exécuter ce travail.
Je remercie aussi M. le prof. W. LAMPE pour avoir bien voulu mettre à ma disposition du dioxydicinnamoylméthane.

Streszczenie

Badano wpływ sposobu wzbudzenia, temperatury i rodzaju rozpuszczalnika na widmo fluorescencji roztworów barwnika para-para-dwuoksydwucynamoilmetanu. Próby wzbudzenia widma fluorescencji światłem o długości fali przypadającej w różnych obszarach widma absorbcyjnego nie wykazały żadnej zmiany w rozkładzie natężeń w emisji.

Stwierdzono, że rozkład natężeń w widmie fluorescencji różnych roztworów tego barwnika ulega dużym zmianom, przy czym obszar widma przesuwa się w stronę fal długich ze wzrostem stałej dielektrycznej rozpuszczalnika.

Sfotografowano również widma fluorescencji badanego związku w tych samych rozpuszczalnikach w temperaturze -180^0 *C*. Krzywe mikrofotometryczne widm fluorescencji sześciu roztworów w temperaturach $+20^0 C$ i -180^0 C zestawione są na fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Bibliographie

1. MARGULIES, P.: *Acta Phys. Pol.* **3**, 373 (1934).
2. PRINGSHEIM, P.: *Fluoreszenz und Phosphoreszenz im Lichte der neueren Atomtheorie.* III Auflage. Berlin (1928). S. 222.
3. RAKOWER, E.: *Acta Phys. Pol.* **3**, 413 (1934).
4. TWAROWSKA, B.: *Acta Phys. Pol.* **2**, 267 (1933).
5. TWAROWSKA, B.: *Acta Phys. Pol.* **3**, 401 (1934).

Untersuchungen über den Grad der Gleichrichtung von Kristalliten in den Holzarten einiger tropischer Bäume

Z badań nad ustrojem krystalitów w niektórych drzewach podzwrotnikowych

Von Cecylia SZWACKA, Warschau, Institut für Experimentalphysik der Joseph Piłsudski Universität

(Eingegangen am 14. Juli 1937)

Mit Hilfe der Röntgenanalyse konnte festgestellt werden, dass die weichen tropischen Holzarten in den meisten Fällen eine beträchtliche Menge mineralischer Bestandteile besitzen, während dies bei den Holzarten der gemässigten Zone selten vorkommt, und dann auch nur in ganz geringen Mengen.

Der Gleichrichtungsgrad der Zellulosekristallite in den untersuchten weichen Holzarten war sehr verschieden und schwankte zwischen dem völligen Fehlen der paratropischen Richtung (dunkler Teil von *Paulinia sp.*) und einer guten Orientierung der meisten Kristallite in der Faserrichtung (Holzarten der zweiten Gruppe).

Im Falle der Existenz einer paratropischen Richtung besitzt diese beinahe keine Dispersion, während in der Zellulose einheimischer Holzarten, wie z. B. der Kiefer, das Gegenteil der Fall ist.

Die am Ort untersuchten Holzarten von beträchtlicher Härte zeigten entweder einen geringen Gleichrichtungsgrad der Kristallite (Guajakholz und Zedernholz vom Libanon), oder ein Fehlen der Gleichrichtung überhaupt (*Phytelephas macrocarpa R. et P.*).

Aus obigen Resultaten kann der Schluss gezogen werden, dass in den untersuchten Holzarten der Gleichrichtungsgrad der Zellulosekristallite für die Härte des Holzes nicht entscheidend ist.

Die von S. PIEŃKOWSKI und seinen Mitarbeitern ausgeführten röntgenanalytischen Holzuntersuchungen zielten dahin, die Feinstruktur und deren eventuell vorhandene Abhängigkeit von den physikalischen Eigenschaften des Holzes zu ergründen *(3, 4, 5, 6, 7)*.

In vorliegender Arbeit wurden einige Holzarten tropischer Pflanzen mit Röntgenstrahlen untersucht, wobei 0,5 *mm* dicke, den Fasern parallel

ausgeschnittene Proben, mit Röntgenstrahlen durchleuchtet wurden. Das benutzte 0,3 *mm* weite Strahlenbündel fiel senkrecht auf die Holzproben. Als Strahlenquelle diente eine SEEMANN-Lampe mit *Cu*-Antikathode, in der die Röntgenstrahlen bei 25 *KV* Spannung und 15 *mA* Stromstärke erzeugt wurden.

Die Belichtungszeiten schwankten je nach Bedarf für die einzelnen Proben zwischen 4 und 20^h. Es wurden folgendene Holzproben tropischer Bäume untersucht:

1) *Paulinia sp. (Sapindaceae);*
2) *Bauhinia sp. (Leguminosae);*
3) *Euterpe montana MART.* (Handelsname — Hermelinpalme von Venezuela);
4) *Euterpe edulis MART.* (Handelsname—Assüpalme von Peru);
5) *Cocos nucifera L.* (Handelsname—Kokospalme von Liberia);
6) *Brosimum Aubletti POEPP.— Piratinera guaianensis* (Handelsname—Schlangenholz von den Inseln Molukken).

Das Holz dieser Pflanzen zeichnet sich durch eine ziemlich lose Struktur aus, worauf eine ausgeprägte Spaltbarkeit in der Faserrichtung und eine etwas geringere senkrecht dazu hinweisen.

Eine andere Gruppe der untersuchten Holzarten sind Hölzer von sehr grosser Härte; dazu gehören *Guaiacum officinale L.* und *Cedrus Libani BARR.* Ausserdem wurden Schichten des Samenkernes von *Phytelephas macrocarpa R. et. P.*, auch Pflanzenelfenbein genannt, untersucht, das eigentlich kein Holz ist, sich aber durch verhältnissmässig grosse Härte auszeichnet.

I. *Paulinia sp.*

Der Stamm der *Paulinia sp.* zeigt im Querschnitt eine Reihe konzentrischer Jahresringe, die durch schmale dunkle Schichten *C* (Fig. 1) von einander getrennt sind. Jede dieser Jahresschichten zerfällt in eine Reihe radial geordneter, heller und dunkler Teile (*A* und *B* in Fig. 1).

Die Röntgenuntersuchung des hellen Holzteiles *A* ergab einen schwankenden Gleichrichtungsgrad der Zellulosekristallite, worauf das Auftreten von vier sehr schwachen Schwärzungsmaximen auf dem Ringe des DEBYE-SCHERRER-Diagramms, der der Reflexion von der Zellulosenetzebene (002) entspricht (Fig. 2), hinweist. Diese Maxima liegen auf dem Ring symmetrisch geordnet in Abständen von 90°, der Abstand von der Äquatoriallinie beträgt somit 45°. In Fig. 3 ist das Mikrophotogramm dieser Platte dargestellt; man sieht vier äusserst schwach angedeutete Maxima mit fast gleichem Abstand von einander.

Auf Grund der Untersuchung des dunklen Holzteiles *B* (Fig. 1) mit Röntgenstrahlen konnte keine Faserstruktur nachgewiesen werden.



FIG. 3. *Paulinia sp.*, der helle Teil *A*. Vier schwache Maxima I, II, III, IV.

Im Diagramm (Fig. 4) konnten viele ungeordnete LAUE-Punkte beobachtet werden, was auf einen unbekannten Bestandteil mineralischer Herkunft, der in Form für die Beobachtung von LAUE-Punkten hinreichend grosser und ungeordneter Kristalle auftritt.



FIG. 6. *Paulinia sp.*, der dunkle Zwischenteil *C* des Holzes. *R*— die Äquatoriallinie.

Die dunkle, konzentrisch gelagerte Zwischenschicht *C* (Fig. 1) zeigt eine hochinteressante Struktur, die sich auf den Röntgendiagrammen durch sehr scharfe Schwärzungspunkte im (002) - Ring (Fig. 5) und im Mikrophotogramm (Fig. 6) charakterisiert. Dies weist auf die Existenz einer ausgeprägten paratropischen, beinahe dispersionslosen, Richtung hin (Fig. 6). Die Punkte tiefster Schwärzung treten auf einem schwächeren, beinahe gleichmässig geschwärzten DEBYE-SCHERRER-Ring auf. Vermutlich ist in Medien mit völlig ungeordneten Kristalliten eine Schar solcher mit ausgeprägter Gleichrichtung vorhanden.

Es ist aber auch möglich, dass das Präparat in einer Dicke von 0,5 *mm* zwei verschiedene Schichten besitzt. Welcher von den beiden Möglichkeiten eine grössere Wahrscheinlichkeit zuzusprechen ist, konnte nicht enschieden werden.

II. *Bauhinia sp.*

Das Holz von Liana *Bauhinia sp.* hat keine einheitliche äussere Struktur, sondern besteht aus unregelmässig verteilten hellen und dunklen Teilen (Fig. 7). Der helle Teil des Holzes gibt DEBYE-SCHERRER-Ringe mit zwei in der Äquatoriallinie liegenden sehr scharfen und zwei in 90^0 Winkelentfernung davon liegenden sehr schwachen und diffusen Maximen. Dies ist deutlich auf dem Mikrophotogramm dieser Platte (Fig. 8 und 9) zu sehen.

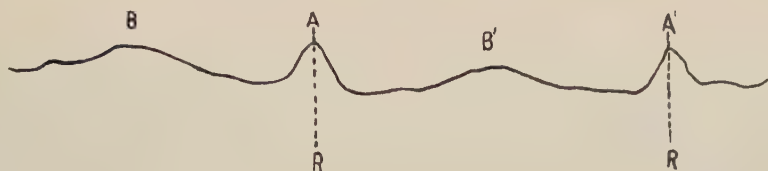


FIG. 9. ***Bauhinia sp.***, der helle Teil des Holzes. *R*— die Äquatoriallinie. Die Maxima *A* und *A'* auf der Äquatoriallinie; die Maxima *B* und *B'* in einer Winkelentfernung von 90⁰ von der Äquatoriallinie.

Der helle Holzteil besitzt noch einen anderen, nicht identifizierten Bestandteil, vermutlich mineralischer Natur, aus ziemlich grossen Kristallen, die viel LAUE-Punkte liefern (Fig. 8).

Obwohl sich der dunkle Teil vom hellen scheinbar stark unterscheidet, gibt er ähnliche Röntgendiagramme, die sich von den beschriebenen durch eine geringere Zahl von LAUE-Punkten unterscheiden (Fig. 10). In den Röntgendiagrammen treten zwei ausgeprägte Schwärzugsmaxima auf, was auf die Existenz einer ausgeprägten paratropischen Richtung hinweist (Fig. 10 und Mikrophotogramm Fig. 11).



FIG. 11. ***Bauhinia sp.***, der dunkle Holzteil. *R*— die Äquatoriallinie.

III. *Euterpe montana MART.*

Ein Querschnitt des Stammes von *Euterpe montana MART.* liess eine ungleichmässige Struktur vermuten, da im Querschnitt dunklere und hellere Teile deutlich sichtbar waren. Die dunkleren Teile häufen sich an der Rinde des Stammes (Fig. 12). Für die verschieden gefärbten Holzteile wurden Röntgendiagramme aufgenommen, die aber alle miteinander identisch waren, was vermuten lässt, dass der in den dunklen Teilen enthaltene Farbstoff keinen kristallinen Bau hat. Die Röntgendiagramme der *Euterpe montana MART.* sind typisch für Zellulose, deren Kristallite parallel zu einer bestimmten bevorzugten Richtung—der Faserrichtung—eingeordnet sind (sogenannte Faserdiagramme) (Fig. 13). Es wurden ebenfalls senkrecht zur Faserrichtung ausgeschnittene Holzproben von *Euterpe montana MART.* durchstrahlt, wobei sich ergab, dass die Zellulosekristallite in dieser Richtung völlig ungeordnet verteilt sind (Fig. 14)—eine Eigenschaft, die alle natürlichen Fasern aufweisen müssten.

IV. *Euterpe edulis MART.*

Euterpe edulis MART. besitzt Holz von ziemlich dunklem, braunschwarzem Farbton; es ist eine ordnungslose Mischung dunkler und heller Teile, die schwer von einander zu trennen sind (Fig. 15). Die Röntgendiagramme der *Euterpe edulis MART.* sind denen der *Euterpe montana MART.* ausserordentlich ähnlich (Fig, 13), sie weisen also auf eine Parallelstellung der Zellulosekristallite zur Faserachse hin.

V. *Cocos nucifera L.*

Das Holz von *Cocos nucifera L.* besitzt eine ähnliche Struktur wie *Euterpe edulis MART.* nur von hellbraunem Farbton. Die Röntgendiagramme von *Cocos nucifera L.* sind denen von *Euterpe montana MART.* und *Euterpe edulis MART.* ähnlich. Sie unterscheiden sich von den letztgenannten durch das Auftreten vieler ungeordneter LAUE-Punkte, was auf die Existenz von genügend grossen Kristallen eines oder mehrerer Bestandteile, wahrscheinlich mineralischer Herkunft, hinweist (Fig. 16).

VI. *Brosimum Aubletti POEPP.*

Brosimum Aubletti POEPP. besitzt dunkelbraunes, aus dunkleren und helleren Teilen zusammengesetztes Holz, das wie Schlangenleder aussieht, dem es auch seinen Handelsnamen, Schlangenholz, verdankt. Die Röntgendiagramme von *Brosimum Aubletti POEPP.* sind denen von *Cocos nucifera L.* ähnlich—hier tritt auch eine Menge LAUE-Punkte auf (Fig 17). Die Röntgendiagramme der Holzarten unseres Klimas, wie die der Kiefer, Lärche, Esche, Erle, Birke, Eiche, Pappel und drgl., geben keinen Hinweis auf die Existenz genügend ausgebildeter Kristalle mineralischer Substanzen, die sich durch LAUE-Punkte bemerkbar machen könnten. Dagegen treten in den Diagrammen der Harz enthaltenden Holzarten viele LAUE-Punkte auf, deren Lage auf eine enge Beziehung zur Struktur der Zellulosekristallite hinweist, wie S. PIEŃKOWSKI und L. JURKIEWICZ gezeigt haben (2).

VII. *Guaiacum officinale L.*

Das Guajakholz ist aus zwei Teilen zusammengesetzt, der eine, helle Teil, das Splintholz (*alburnum*), bildet eine äussere, unter der Rinde liegende Schicht, der andere, das Kernholz (*duramen*), bildet den Innenteil des Stammes.

Das Splintholz, von hellem Farbton, enthält wenig Harz (bis 2,85%) und ist leichter als Wasser, dagegen enthält das dunkelbraun gefärbte Kernholz bis 22% Harz und hat ein grösseres spezifisches Gewicht als Wasser (ungefähr 1,3). Beide Teile sind von sehr beträchtlicher Härte. Der dunkle Farbton und das für Holz verhältnismässig grosse spezifische Gewicht des Kern - Guajakholzes hängt mit der enthaltenen beträchtlichen Harz-

menge zusammen, denn durch Auslaugen des Kernholzes in Benzol, in dem sich Harz auflöst, wird das Holz hell und leichter als Wasser, ähnlich wie Splintholz. Die Röntgendiagramme des Splint- und Kernholzes von *Guaiacum officinale L.* ähneln denen der gewöhnlichen Kiefer; auf dem der Reflexion an der Netzebene (002) entsprechenden DEBYE-SCHERRER-Ring treten zwei deutliche und ziemlich breite Schwärzungsmaxima auf (Fig. 18, 19 und 20). Dies weist darauf hin, dass die Zellulosekristallite in den Zellen teilweise in der Faserrichtung geordnet sind, wobei eine ziemlich grosse Dispersion der paratropischen Richtung auftritt.

Vergleicht man die den Schwärzungsverlauf entlang des (002)-DEBYE-SCHERRER-Ringes für Guajakholz und Kiefernholz wiedergebenden Mikrophotogramme, so ist ersichtlich, dass der Schwärzungsunterschied zwischen dem weniger geschwärzten Teil des Ringes und den Bögen der maximalen Schwärzung für Guajakholz kleiner ist, als für Kiefernholz. Wir ziehen daraus den Schluss, dass die Gleichrichtung der Kristallite im Guajakholz etwas weniger ausgesprochen auftritt als im Kiefernholz (Fig. 21 und 22).



FIG. 21. Guajakkernholz dem Ring entlang. *R*— die Äquatoriallinie.



FIG. 22. Kiefernholz. *R*— die Äquatoriallinie.

Zwischen den Röntgendiagrammen des Splint- und Kernholzes existiert ein gewisser feiner Unterschied, da auf den Diagrammen des Kernholzes zwischen dem (002)- und (004)- Ring ein breiter, stark diffuser Ring zum Vorschein kommt (Fig. 18), der auf den Splintholzdiagrammen beinahe unsichtbar ist (Fig. 19) und vom Harz des Guajakholzes stammt—das Kernholz enthält ja bis 22% Harz. Ein Beweis dafür ist, dass dieser Ring in den Röntgendiagrammen des mit Benzol ausgelaugten Kernholzes sehr geschwächt erscheint, sein Schwärzungsgrad ist von derselben Grössenordnung wie auf den Diagrammen des Splintholzes, das ja wenig Harz enthält (Fig. 19 und 23). Die Unterschiede im Schwärzungsgrad des

diffusen zwischen (002) und (004) liegenden Ringes zeigen die Mikrophotogramme in Fig. 24 und 25. Sie wurden erhalten, indem die entsprechenden Platten längs der Diagonalen ausphotometriert wurden, die sen-

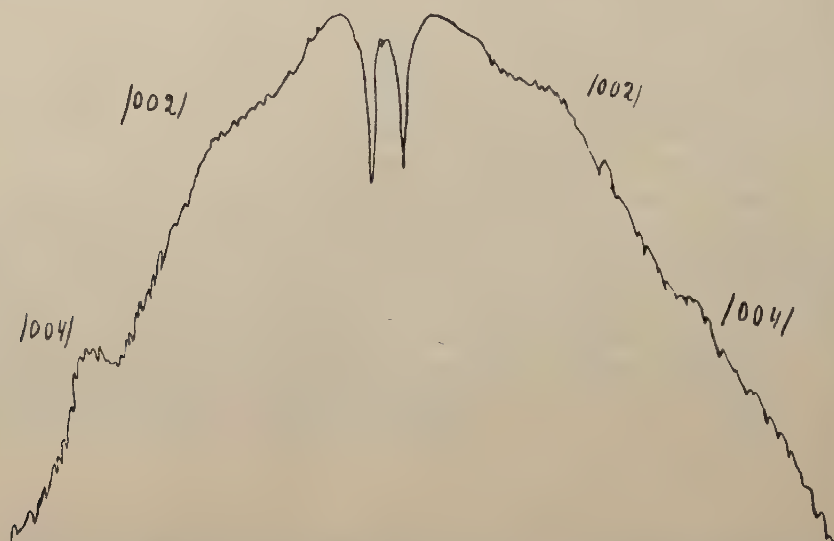


FIG. 24. Das Mikrophotogramm des Guajakkernholzes entlang dem Durchmesser, welcher auf der Verbindungslinie der Schwarzungsmaxima senkrecht steht.



FIG. 25. Das Mikrophotogramm des Guajaksplintholzes entlang dem Durchmesser, welcher auf der Verbindungslinie der Schwarzungsmaxima senkrecht steht.

krecht zur Geraden steht, welche die Schwärzungsmaxima des Ringes (002) verbindet. Auch wurde ein aus Guajakholz senkrecht zur Faserrichtung ausgeschnittenes Plättchen untersucht. Die erhaltenen Röntgendiagramme weisen auf ein totales Fehlen jeglicher Gleichrichtung der Zellulosekristallite in dieser Richtung hin, was ja für alle zur Zeit untersuchten Holzarten zutrifft (Fig. 26).

Die DEBYE-SCHERRER-Ringe in den Diagrammen von *Guaiacum officinale L.* sind etwas diffuser, als die des einheimischen Kiefernholzes. Es hat den Anschein, als ob die Zellulosekristallite im Guajakholz weniger gut ausgebildet seien. Dies muss jedoch mit Vorbehalt aufgenommen werden, denn diese Tatsache kann auch durch den geringen Dickenunterschied der untersuchten Holzproben hervorgerufen worden sein.

VIII. *Phytelephas macrocarpa R. et P.*

Es wurden Schichten des Samenkornes von *Phytelephas macrocarpa R. et P.* untersucht, dessen Endosperm weiss-gelblich gefärbt und von grosser Härte ist. Diesen äusseren Eigenschaften verdankt *Phytelephas macrocarpa R. et P.* seinen populären Namen Pflanzenelfenbein.

Die Masse des Endosperms besteht aus Reservezellulose und aus 35—40% Mannan, das in zwei Modifikationen *A* und *B* auftritt. Neben diesen beiden Modifikationen enthält das Endosperm noch eine geringe Menge (5%) Zellulose. Aus dem Samenkorn wurden in drei zueinander senkrechten Richtungen orientierte Plättchen ausgeschnitten und durchstrahlt. Die Röntgendiagramme für alle Plättchen erwiesen sich als vollkommen identische, typische DEBYE-SCHERRER-Diagramme, die keine Spur von einer Faserstruktur zeigten (Fig. 27). Auf den Diagrammen sind elf Ringe sichtbar, von denen acht der Zellulose entsprechen, während die übrigen drei ihr nicht zugesprochen werden können. Vielleicht rühren sie von Reservezellulose oder auch von Mannan (Tab. 1), her. Für jeden Ring des Diagramms von *Phytelephas macrocarpa R. et P.* wurden die BRAGGschen Reflexionswinkel berechnet und die erhaltenen Winkelwerte mit den von H. MARK (*1*) angegebenen Werten für die charakteristischen Reflexionswinkel der Zellulose verglichen. Wie aus Tab. 1 ersichtlich ist, entsprechen drei der berechneten BRAGGschen Reflexionswinkel keinem der der Zellulose zugeschriebenen Winkel. Sie müssen daher von der Reflexion an den Netzebenen von Kristalliten anderer Bestandteile des Endosperms von *Phytelephas macrocarpa R. et P.* herrühren.

IX. *Cedrus Libani BARR.*

Das von Libanon stammende Zedernholz besitzt einen Härtegrad, der mit dem des Guajakholzes oder auch mit dem des Endosperms von *Phytelephas macrocarpa R. et P.* verglichen werden kann. Parallel zur Faser-

Tabelle 1.

Lage der Ringe	2Θ für *Phytelephas macrocarpa R. et P.*	2Θ für Zellulose nach H. MARK
1 innerer	14° 44′	14° 54′
1 äusserer	15° 55′	
2 äusserer	17° 52′	16° 30′
3 innerer	19° 24′	
3 äusserer	20° 11	20° 38′
4 äusserer	22° 52′	22° 52″
5 äusserer	24° 18′	——
6 äusserer	26° 10′	——
7 innerer	28° 25′	
7 äusserer	30° 8′	30° 1′
8 innerer	32° 1′	
8 äusserer	33° 2′	33° 20′
9 innerer	37° 2′	34° 40′
9 äusserer	38° 58′	
10 innerer	41° 46′	40° 20′
10 äusserer	43°. 19′	
11 äusserer	46° 35′	46° 30′

richtung ausgeschnittene Zedernholzproben zeugen von einer schwach ausgebildeten Faserstruktur. Auf dem der Reflexion an der (002)-Netzebene entsprechendem DEBYE-SCHERRER-Ring treten vier sehr schwache Schwärzungsmaxima (Fig. 28) auf. In Fig. 29 ist das Mikrophotogramm dieser

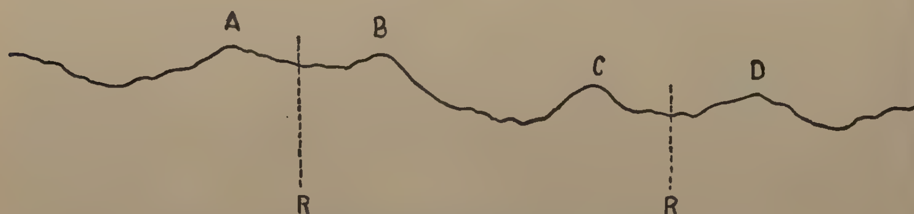


FIG. 29. *Cedrus Libani BARR. R*— die Äquatoriallinie. Vier Maxima *A, B, C, D.*

Platte dargestellt; man sieht dort die vier schwach hervortretenden Schwärzungsmaxima *(A, B, C, D)*. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass

Zedernholz einen geringen Gleichrichtungsgrad der Zellulosekristallite besitzt und dabei eine grosse Dispersion der paratropischen Richtung (Tab. 2) aufweist. Interessant ist die Tatsache, dass die senkrecht zur Faserrichtung ausgeschnittenen Zedernholzproben auf den Röntgendiagrammen ebenfalls vier schwach hervortretende Maxima zeigen (Fig. 30), was an anderen Holzarten nicht beobachtet werden konnte. Es könnte daher die Vermutung ausgesprochen werden, dass das vom Libanon stammende Zedernholz auch in der zur Faserrichtung senkrechten Richtung einen geringen Gleichrichtungsgrad besitzt. Diese Annahme muss mit Vorbehalt aufgenommen werden, das es ja leicht möglich ist, dass hier eine starke Verwirrung der Fasern auftritt, so dass das Röntgenbündel nicht immer parallel zur Faserrichtung läuft.

Die für die tropischen Holzarten erhaltenen Daten erlauben diese in Gruppen einzuteilen. Zur ersten Gruppe kann die *Paulinia sp.* und *Bauhinia sp.* gerechnet werden, zur zweiten *Euterpe montana MART.*, *Euterpe edulis MART.*, *Cocos nucifera L.* und *Brosimum Aubletti POEPP.*. Die Baumarten diesen beiden Gruppen besitzen weiches Holz. Zur dritten Gruppe gehören die Baumarten mit hartem Holz, wie *Cedrus Libani BARR.* und *Guaiacum officinale L.* Auch wird der Samen von *Phytelephas macrocarpa R. et P.* zu den harten Präparaten gerechnet.

Die erste Gruppe weist eine teilweise Gleichrichtung der Zellulosekristallite in der Faserrichtung auf, mit sehr deutlich hervortretender paratropischer Richtung und geringer Dispersion, im Gegensatz zur Zellulose der einheimischen Kiefer, wo ja die Dispersion der paratropischen Richtung ziemlich gross ist (Tab. 2). Einige Holzteile sind völlig ungeordnet, wie

Tabelle 2.

Name des Holzes	Winkel der totalen Dispersion
1 *Paulinia sp.*, dunkler Holzteil C	10° 30′
2 *Bauhinia sp.*, heller Holzteil	19°
3 *Bauhinia sp.*, dunkler Holzteil	18°
4 Kiefernholz	44°
5 Guajakkernholz	43° 30′
6 Guajaksplintholz	34°
7 Guajakkernholz in Benzol ausgelaugt	41°
8 *Cedrus Libani BARR.*	70° 20′

z. B. die dunklen Teile *B* von *Paulinia sp.*. Das Holz dieser Pflanzen enthält in den meisten Fällen in beträchtlichen Mengen einen oder mehrere

Bestandteile mineralischer Herkunft in Form hinreichend grosser, ungeordneter Kristalle. Die DEBYE-SCHERRER-Ringe des Holzes dieser Pflanzen entsprechen der Zellulose und sind, allgemein genommen, weniger diffus als bei der Kiefernzellulose. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass die Zellulosekristallite in diesen Pflanzen besser ausgebildet sind als in der Zellulose der einheimischen Kiefer (Fig. 5, 8, und 20). Der Gleichrichtungsgrad und die enthaltene Menge mineralischer Bestandteile in diesen Holzarten kann in den verschiedenfarbigen und von einander trennbaren Holzteilen verschieden sein. Die zweite Gruppe der untersuchten tropischen Holzarten besitzt eine teilweise sehr gute Gleichrichtung der Zellulosekristallite in der Faserrichtung und gibt sogenannte Faserdiagramme, d. h., Röntgendiagramme, die für die Zellulose von typischer Faserstruktur charakteristisch sind (Fig. 13). Ähnliche Diagramme zeigt der Flachsstengel, einige Teile der Tanne, Birkenholz, Eichenholz, Erlenholz u. a.

Bei *Euterpe montana MART.* weisen die verschieden gefärbten Holzteile eine gleichmässig ausgebildete gute Faserstruktur auf, während sie sich bei den übrigen Holzarten dieser Gruppe überhaupt nicht von einander trennen lassen. Einige der letzteren, wie *Brosimum Aubletti POEPP.* und *Cocos nucifera L.*, enthalten in beträchtlicher Menge einen oder auch mehrere in Form hinreichend grosser ungeordneter Kristalle auftretende Bestandteile mineralischer Herkunft.

Zur dritten Gruppe gehören die harten Holzarten, wie *Guaiacum officinale L.* und *Cedrus Libani BARR.*, sowie der Samen von *Phytelephas macrocarpa R. et P.* Guajak- und Zedernholz geben Diagramme, die auf eine schwach hervortretende Faserstruktur mit grosser Dispersion der bevorzugten Richtung hinweisen (Tab. 2), was aus den Mikrophotogrammen in Fig. 21 und 29 am besten hervorgeht, während das Samenkorn *Phytelephas macrocarpa R. et P.* ein völliges Fehlen jeglicher Spur von Gleichrichtung aufweist. Die DEBYE-SCHERRER-Ringe sind in den Diagrammen der harten Präparate im allgemeinen ziemlich diffus, was von einer weniger guten Ausbildung der Zellulosekristallite zeugt.

Ich erlaube mir an dieser Stelle dem hochverehrten Herrn Professor Dr. S. PIEŃKOWSKI für die Anregung zu dieser Untersuchung, sowie für die mir im Laufe der Arbeit erteilten Ratschläge und Hinweise meinen Dank auszusprechen.

Ich danke gleichfalls Herrn Dr. A. SOŁTAN für die wohlwollende Hilfe, die mir von seiner Seite während der Arbeit zuteil wurde.

Herrn Dr. S. KRUPKO sei für die bereitwillige Hilfe bei der Identifizierung der Holzproben, sowie Herrn Dr. M. PRONER für seine fachmännischen Ratschläge mein herzlicher Dank ausgesprochen.

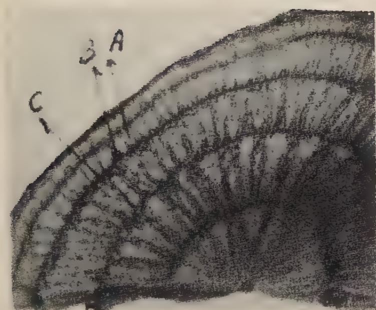


FIG. 1

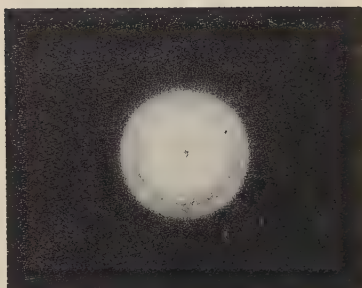


FIG. 2

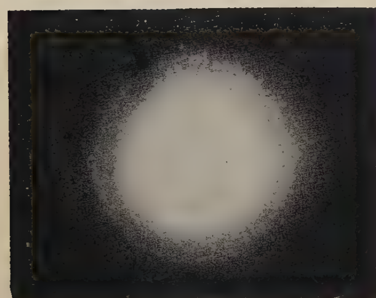


FIG. 4

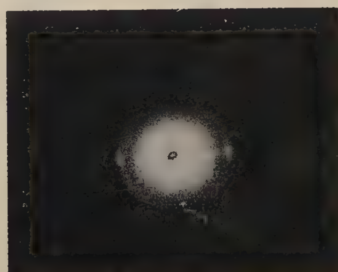


FIG. 5

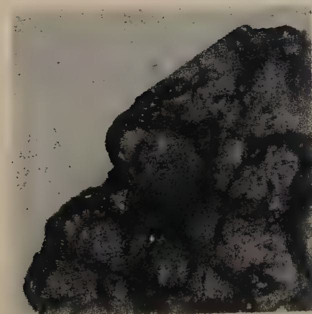


FIG. 7

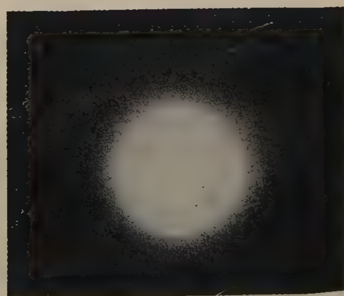


FIG. 8

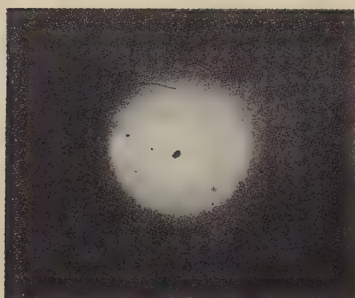


FIG. 10

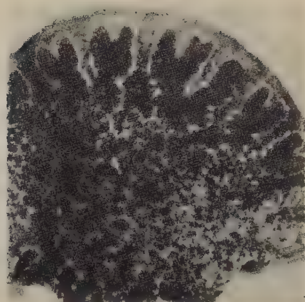


FIG. 12

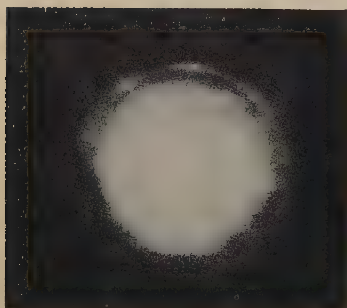


FIG. 13

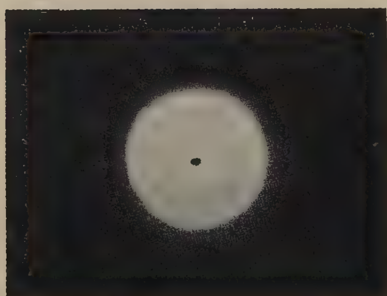


FIG. 14

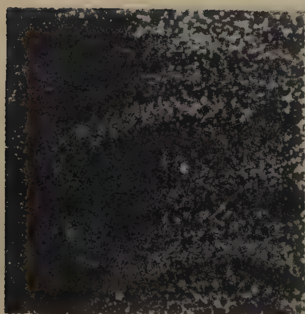


FIG. 15

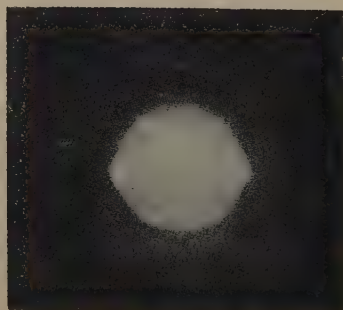


FIG. 16

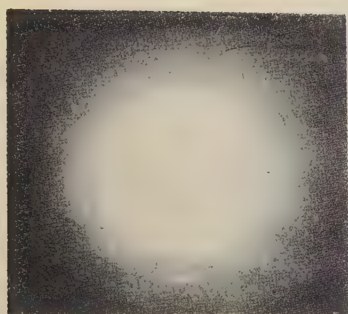


FIG. 17

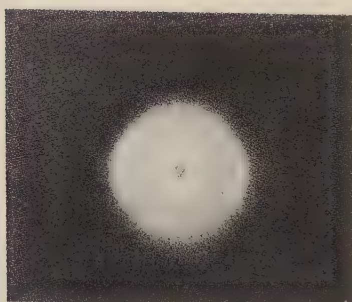


FIG. 18

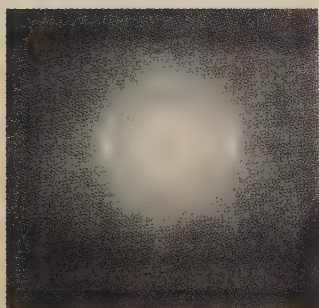


FIG. 19

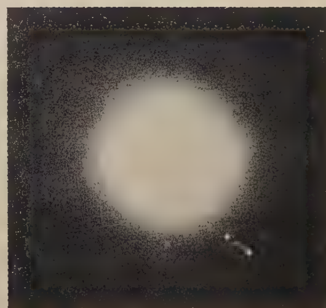


FIG. 20

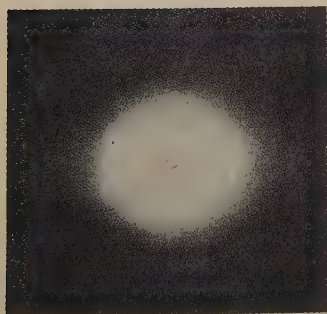


FIG. 23

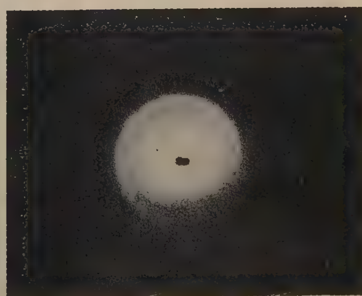


FIG. 26

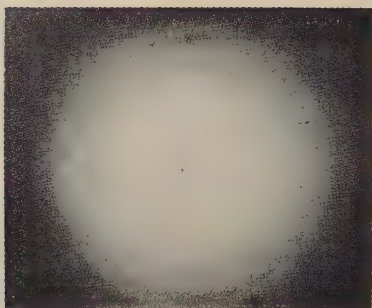


FIG. 27



FIG. 28

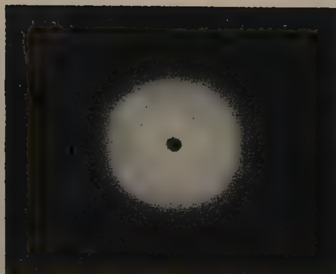


FIG. 30

Streszczenie

W pracy niniejszej badano zapomocą promieni RÖNTGENA budowę subtelną drewna niektórych drzew podzwrotnikowych. Jedne z badanych drzew posiadają drewno miękkie, inne—twarde.

Drewna miękkie dają rentgenogramy dwojakiego rodzaju. Jedne z nich wykazują częściowe uporządkowanie krystalitów celulozy względem kierunku włókna, przyczym kierunek paratropowy posiada znikomy stopień dyspersji (fig. 5, 8 i 10).

Pozostałe drzewa miękkie dają rentgenogramy typowe dla celulozy, która posiada częściowe bardzo dobre uporządkowanie krystalitów względem kierunku włókna (fig. 13). Drzewa, których drewno odznacza się dużą twardością, wykazują na rentgenogramach istnienie jednego kierunku paratropowego, posiadającego dużą dyspersję (fig. 18 i 28.) Rentgenogramy warstw nasienia *Phytelephas macrocarpa R. et P.* nie wykazują śladów budowy włóknistej (fig. 27); zawierają tylko dużą ilość pierścieni (jedenaście), z których trzy nie pochodzą od celulozy.

Ogólnie można powiedzieć, że dla różnych drzew twardość drewna nie jest związana z uporządkowaniem krystalitów celulozy w komórce.

Literaturverzeichnis

1. MARK, H.: *Physik und Chemie der Zellulose.* Berlin (1932).
2. PIEŃKOWSKI, S. und JURKIEWICZ L.: *Acta Phys. Pol.* **3**, 435 (1934).
3. PIEŃKOWSKI, S.: *ZS. f. Phys.* **63**, 610 (1930).
4. PIEŃKOWSKI, S.: *C. R. des Séances de la Soc. Pol. de Phys.* **5**, 275 (1931).
5. PIEŃKOWSKI, S. und KULESZANKA, Z.: *Acta Phys. Pol.* **3**, 393 (1934).
6. SCHMIDT, B.: *Z. f. Phys.* **71**, 696 (1931).
7. SCHMIDT, B.: *Acta Phys. Pol.* **1**, 103 (1932).

Zur Theorie der Multipolstrahlung

W sprawie teorii promieniowania multipolowego

Von J. BLATON, Warschau

(Eingegangen am 8. September 1937)

Es wird gezeigt, wie die Zerlegung des elektromagnetischen Feldes, das von einer periodisch schwingenden Strom- und Ladungsdichte herrührt, nach elektrischen und magnetischen Multipolstrahlungen vorzunehmen ist. Dabei ist jede einzelne Multipolstrahlung bereits durch eine einzige Skalarfunktion bestimmt, für die man einfache Formeln erhält. Die quantentheoretische Anwendung der erhaltenen Resultate erlaubt den ZEEMANeffekt einer beliebigen Multipolstrahlung einfach anzugeben.

Da schon die elektrische Dipolstrahlung in der hier entwickelten Theorie nicht allein durch das elektrische Moment des Ladungsverteilung bestimmt ist, so treten bei Anwendung der erhaltenen Intensitätsformeln für die elektrische Dipolstrahlung auf ein SCHRÖDINGERsches Einelektronenproblem Unterschiede gegenüber den üblichen Intensitätsformeln auf, die nicht zu vernachlässigen sind, sobald die Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes von derselben Grössenordnung wird, wie die COMPTONwellenlänge.

1. *Einleitung*

Das Problem der Zerlegung der von einem strahlendem System ausgesandten Strahlung in die Strahlung einzelner Multipole wurde schon mehrfach behandelt *(5)*. Doch beschränkte man sich bei dieser Zerlegung meist auf die bedeutendsten Glieder, nämlich die elektrische und magnetische Dipolstrahlung und die elektrische Quadrupolstrahlung.

Die an dieser Stelle entwickelte Theorie der Multipolstrahlung schliesst sich an die Arbeiten von MIE *(3)* und DEBYE *(2)* an. Das Prinzip der Zerlegung des elektromagnetischen Feldes im Vakuum in die Anteile der einzelnen Multipolstrahlungen wurde schon in diesen Arbeiten gegeben. Diese Arbeiten sagen aber nichts darüber aus, wie bei einem System, dessen Strom und Ladungsdichte gegeben ist, die Anteile der einzelnen Multipolstrahlungen zu berechnen sind. Dies soll in der vorliegenden Arbeit geschehen. Es wird dabei gezeigt, dass der Zerlegung des ausgestrahlten

elektromagnetischen Feldes in die Anteile der einzelnen Multipolstrahlungen eine entsprechende Zerlegung der Strom- und Ladungsdichte entspricht.

Der grosse Vorteil der MIE-DEBYEschen Zerlegung des elektromagnetischen Feldes liegt darin, dass, wie hier bewiesen werden soll, die gesamte ausgestrahlte Energie gleich ist der Summe der von den einzelnen Multipolen ausgestrahlten Energien.

Wir gehen bei unseren Überlegungen von einem mit der Frequenz ν schwingenden Strom- und Ladungsdichtefeld aus, das überall ausser einer Kugel vom Radius a verschwindet.* Den Mittelpunkt dieser Kugel wählen wir als Koordinatenursprung. Bei Problemen der Atom- bzw. Molekülstrahlung wird man am zweckmässigsten den Koordinatenursprung im Schwerpunkt des strahlenden Systems wählen.

Das von diesem System ausgestrahlte el. m. Feld zerlegen wir nun nach MIE zunächst in zwei Teilfelder ein: das Feld der sogenannten elektrischen Strahlung und das Feld der sogenannten magnetischen Strahlung.

Jedes dieser Teilfelder wird bereits durch eine einzige Skalarfunktion charakterisiert. Diese beiden Skalarfelder (die wir mit Π^e für die elektrische und Π^m für die magnetische Strahlung bezeichnen) lassen sich aus dem Strom- und Ladungsdichtefeld auf einfache Weise berechnen. Es zeigt sich dabei, dass sich eine einfache Zerlegung des Stromdichtefeldes in drei Teilfelder durchführen lässt, von denen das erste nur für die elektrische, das zweite nur für die magnetische Strahlung verantwortlich ist, während das dritte Teilfeld kein el. m. Feld ausserhalb der Ladungen ergibt.

Die Entwicklung der Skalarfunktionen Π^e bzw Π^m nach flächenhaften Kugelfunktionen ergibt dann direkt die Zerlegung der elektrischen bzw. magnetischen Strahlung in die Strahlungen der einzelnen elektrischen bzw. magnetischen Multipole.

2. *Die elektrische und magnetische Strahlung*

a) Zerlegung des Strahlungsfeldes.

Wir gehen von einem periodisch mit der Frequenz ν schwingendem Stromdichtefeld $\mathfrak{J}$ und Ladungsdichtefeld ρ aus, die wir in der Form:

$$\mathfrak{J} = \vec{I} e^{2\pi i\nu t} + \overline{\vec{I}} e^{-2\pi i\nu t}$$
$$\rho = \rho e^{2\pi i\nu t} + \bar{\rho} e^{-2\pi i\nu t} \qquad (1)$$

schreiben, wobei wir die Stromdichte in elektromagnetischen und die La-

* Unsere Überlegungen bleiben auch in dem Falle gültig, wenn Ladungs- und Stromdichte ausserhalb dieser Kugel exponentiell verschwindet.

dungsdichte in elektrostatischen Einheiten messen. $\vec{I}$ und ρ sind reine Raumfunktionen. Überstreichung zeigt die Bildung des komplex-konjugierten Wertes an. $\mathfrak{I}$ und ρ sind durch die Kontinuitätsgleichung

$$div\,\mathfrak{I} + \frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

gebunden, die wegen (1) die Form

$$div\,\vec{I} + ik\rho = 0 \tag{2}$$

annimmt, wobei $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ die mit 2π multiplizierte Wellenzahl bedeutet.

Die MAXWELLschen Gleichungen:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{I} = rot\,\mathfrak{H},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -rot\,\mathfrak{E},$$

$$div\,\mathfrak{E} = 4\pi\rho,$$

$$div\,\mathfrak{H} = 0$$

nehmen für den Fall der Periodizität mit der Frequenz ν bei Einführung von

$$\mathfrak{H} = \vec{H}e^{2\pi i\nu t} + \overline{\vec{H}}e^{-2\pi i\nu t},$$

$$\mathfrak{E} = \vec{E}e^{2\pi i\nu t} + \overline{\vec{E}}e^{-2\pi i\nu t}$$

die folgende Form an:

$$rot\,\vec{H} - ik\vec{E} = 4\pi\vec{I}, \tag{3}$$

$$rot\,\vec{E} + ik\vec{H} = 0. \tag{4}$$

Ausserhalb des Stromdichtefeldes (also ausserhalb einer Kugel vom Radius a, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt) zerlegen wir nach MIE das Feld $\vec{H}$, $\vec{E}$ in zwei Teilfelder $\vec{E}^e$, $\vec{H}^e$ und $\vec{E}^m$, $\vec{H}^m$:

$$\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m,$$

$$\vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m,$$

wobei wir verlangen, dass jedes der Teilfelder für sich den MAXWELLschen

Gleichungen genügen soll. Ausserdem wird gefordert, dass die Radialkomponenten von $\vec{H}^e$ und $\vec{E}^m$ verschwinden. Will man eine Zerlegung des el. m. Feldes im ganzen Raume, also auch dort, wo die Stromdichte nicht verschwindet, durchführen, dann muss das elektromagnetische Feld in drei Teile zerlegt werden. Die beiden ersten Glieder erfüllen dabei die oben genannten Bedingungen, während das dritte überall dort verschwindet, wo die Stromdichte verschwindet. Wir kommen so zu dem Ansatz:

$$\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m + \vec{E}^o,$$

$$\vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m + \vec{H}^o,$$

wobei

$$H_r^e = 0, \tag{5}$$

$$E_r^m = 0, \tag{6}$$

$$\vec{E}^o = \vec{H}^o = 0 \quad \text{für } r > a. \tag{7}$$

Dieser Zerlegung des ausgestrahlten elektromagnetischen Feldes suchen wir eine entsprechende Zerlegung des Stromdichtefeldes zuzuordnen:

$$\vec{I} = \vec{I}^e + \vec{I}^m + \vec{I}^o.$$

Das Feld $\vec{E}^e, \vec{H}^e$ werden wir im Folgendem als das Feld der elektrischen und das Feld $\vec{E}^m, \vec{H}^m$ als das der magnetischen Strahlung bezeichnen.

b) Das Feld der elektrischen Strahlung

Der Forderung (5) sowie der Forderung der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes wird durch den Ansatz

$$\vec{H}^e = -ik[\vec{r}, \vec{grad}\, \Pi^e] = ik\, rot\, \vec{r}\, \Pi^e \tag{8}$$

genüge geleistet. Für das elektrische Feld der elektrischen Strahlung machen wir den Ansatz

$$\vec{E}^e = k^2 \vec{r}\, \Pi^e + \vec{grad} \frac{\partial r \Pi^e}{\partial r}, \tag{9}$$

womit die MAXWELLsche Gleichung (4) befriedigt wird. Die Gleichung (3) ergibt dann für Π^e die Differentialgleichung:

$$\vec{r}\,(\Delta \Pi^e + k^2 \Pi^e) = -\frac{4\pi}{ik} \vec{I}^e.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich offenbar nur dann erfüllen, wenn wir $\vec{I}^e$ in der Form

$$\frac{1}{ik}\vec{I}^e = p(xyz)\vec{r}$$

ansetzen, wobei p eine für $r > a$ verschwindende Skalarfunktion ist. Die Differentialgleichung für Π^e lautet dann:

$$\Delta\Pi^e + k^2\Pi^e = -4\pi p. \tag{9a}$$

Wir wollen Π^e das Potential der elektrischen Strahlung nennen.

c) Das Feld der magnetischen Strahlung

Die Bedingung (6) für das elektrische Feld der magnetischen Strahlung erfüllen wir durch den Ansatz

$$\vec{E}^m = ik[\vec{r}, \overrightarrow{grad}\,\Pi^m] = -ik\, rot\,\vec{r}\,\Pi^m \tag{10}$$

Die MAXWELLsche Gl. (4) ergibt dann für $\vec{H}^m$

$$\vec{H}^m = -\frac{1}{ik} rot\,\vec{E}^m = rot\; rot\,\vec{r}\,\Pi^m. \tag{11}$$

Die Gleichung (3) ergibt die Differentialgleichung für Π^m:

$$[\vec{r}, \overrightarrow{grad}(\Delta\Pi^m + k^2\Pi^m)] = 4\pi\vec{I}^m,$$

woraus sich für $\vec{I}^m$ der folgende Ansatz ergibt:

$$\vec{I}^m = -[\vec{r}, \overrightarrow{grad}\,q] = rot\,\vec{r}\,q,$$

wo die Skalarfunktion q ebenso wie p für $r > a$ verschwindet. Die Differentialgleichung für Π^m lautet dann:

$$\Delta\Pi^m + k^2\Pi^m = -4\pi q. \tag{11a}$$

Π^m wollen wir das Potential der magnetischen Strahlung nennen.

d) Das Feld $\vec{E}^o, \vec{H}^o$

Für das Feld der Stromdichte $\vec{I}^o$ machen wir den Ansatz:

$$\vec{I}^o = \overrightarrow{grad}\,u.$$

Die MAXWELLschen Gleichungen werden bei einer solchen Stromdichteverteilung erfüllt sein, wenn wir

$$\vec{H}^o = 0; \quad \vec{E}^o = -\frac{4\pi}{ik}\vec{I}^o$$

annehmen.

e) Die Bestimmung der Funktionen p und q

Trotzdem zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes der elektrischen bzw. magnetischen Strahlung die explizite Kenntnis der Funktion p bzw. q nicht notwendig ist, wollen wir hier doch hinweisen, wie sich die Berechnung dieser Funktionen durchführen lässt. Nach dem oben Gesagten haben wir für $\vec{I}$ die folgende Zerlegung durchzuführen:

$$\vec{I} = ikp\vec{r} + rot\ q\vec{r} + \overrightarrow{grad}\, u,$$

Aus dieser Gleichung folgen die nachstehenden Gleichungen für p und q:

$$div\, [\vec{r}\, [\vec{r}, \overrightarrow{grad}\, p]] = \frac{1}{ik}\vec{r}\ rot\ rot\, \vec{I}, \tag{12}$$

$$div\, [\vec{r}\, [\vec{r}, \overrightarrow{grad}\, q]] = \vec{r}\ rot\, \vec{I}. \tag{13}$$

Wir bemerken, dass der in diesen Gleichungen auf p und q wirkende Operator identisch ist mit dem Operator, dessen Eigenfunktionen die flächenhaften Kugelfunktionen sind. Bezeichnen wir diesen Operator mit L, so wird für eine Kugelflächenfunktion Φ_ν der Ordnung ν:

$$L\Phi_\nu = div\, [\vec{r}\, [\vec{r}\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_\nu]] = \nu\, (\nu + 1)\, \Phi_\nu\, . \tag{13a}$$

Wie bekannt, gibt es $2\nu + 1$ voneinander unabhängige Kugelflächenfunktionen der Ordnung ν. Wir definieren sie nach DARWIN folgendermassen in Polarkoordinaten ϑ, φ:

$$\Phi_\nu^\mu(\vartheta,\varphi) = (\nu - \mu)\,!\,(1 - cos^2\vartheta)^{\mu/2}\left(\frac{d}{dcos\vartheta}\right)^{\nu + \mu}\frac{(cos^2\vartheta - 1)^\nu}{2^\nu\nu\,!}\,e^{i\mu\varphi},$$

wobei $-\nu \leqslant \mu \leqslant \nu$ ist.
Sie erfüllen die bekannte Orthogonalitätsrelation:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\,\vartheta d\vartheta \Phi_\nu^\mu(\vartheta,\varphi)\overline{\Phi}_{\nu'}^{\mu'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{\nu\nu'}\delta_{\mu\mu'}(\nu + \mu)\,!\,(\nu - \mu)\,!\,\frac{4\pi}{2\nu + 1}.$$

Wir können nun den Stromdichtevektor $\vec{I}$ sowie die Funktionen p und q nach Kugelfunktionen in der folgenden Weise entwickeln:

$$\vec{I} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \vec{j}_{\nu\mu}(r)\,\Phi_{\nu}^{\mu}(\vartheta, \varphi),$$

$$p = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} P_{\nu\mu}(r)\,\Phi_{\nu}^{\mu}(\vartheta,\varphi),$$

$$q = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} Q_{\nu\mu}(r)\,\Phi_{\nu}^{\mu}(\vartheta,\varphi).$$

Dann wird:

$$\vec{r}\,\text{rot}\,\vec{I} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \vec{j}_{\nu\mu}\,[\vec{r}, \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_{\nu}^{\mu}]$$

und

$$L(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu+1) \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} P_{\nu\mu}(r)\,\Phi_{\nu}^{\mu}(\vartheta,\varphi),$$

$$L(q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu+1) \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} Q_{\nu\mu}(r)\,\Phi_{\nu}^{\mu}(\vartheta,\varphi),$$

Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$j_{1\nu\mu} = j_{x\nu\mu} + i j_{y\nu\mu}; \quad j_{2\nu\mu} = j_{x\nu\mu} - i j_{y\nu\mu}; \quad j_{3\nu\mu} = j_{z\nu\mu},$$

wo $j_{x\nu\mu}$, $j_{y\nu\mu}$ und $j_{z\nu\mu}$ die x, y und z -Komponente des Vektors $\vec{j}_{\nu\mu}$ bedeuten. Berücksichtigen wir, dass die Komponenten des Vektors

$$\vec{C} = [\vec{r}, \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_{\nu}^{\mu}] \tag{14}$$

durch

$$C_1 = -i(\nu-\mu)\,\Phi_{\nu}^{\mu+1}; \qquad C_2 = -i(\nu+\mu)\,\Phi_{\nu}^{\mu-1}; \qquad C_3 = i\mu\,\Phi_{\nu}^{\mu} \tag{15}$$

gegeben sind, so erhalten wir unmittelbar:

$$Q_{\nu\mu}(r) = -\frac{i}{\nu(\nu+1)}\Big\{(\nu+\mu+1)\,j_{1,\nu,\mu+1} + \\ + (\nu-\mu+1)\,j_{2,\nu,\mu-1+1} - 2\mu j_{3,\nu,\mu}\Big\}. \tag{16}$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die Funktion P bestimmen. Wir geben nur das Resultat an:

$$P_{\nu\mu}(r) = \frac{r^{\nu-1}}{2\nu(2\nu-1)} \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r^{\nu-1}}(j_{1,\nu-1,\mu+1} -\right.$$

$$\left.- j_{2,\nu-1,\mu-1} - 2j_{3,\nu-1,\mu})\right\} + \frac{1}{2(\nu+1)(2\nu+3)} \frac{1}{r^{\nu+2}} \frac{d}{dr}\left\{ r^{\nu+2}\Big[(\nu+\mu+1)\right.$$

$$(\nu+\mu+2)\, j_{1,\nu+1,\mu+1} - (\nu-\mu+1)(\nu-\mu+2)\, j_{2,\nu+1,\mu-1} +$$

$$\left. + 2(\nu-\mu+1)(\nu+\mu-1) j_{3,\nu+1,\mu}\right\}\Big]. \tag{17}$$

Aus den Gl. (16) und (17) sehen wir, dass die Funktionen p und q bis auf eine additive Funktion der Entfernung r vom Koordinatenursprung bestimmt sind. Da aber eine solche Funktion zum el. m. Feld der Strahlung nichts beiträgt, so bleibt dieser Mangel an Eindeutigkeit belanglos.

3. *Bestimmung der Potentiale* Π^e *und* Π^m

Die Differentialgleichungen (9a) und (11a) werden, da wir nur auslaufende Wellen betrachten, bekanntlich durch die folgenden Integrale gelöst:

$$\Pi^e = \int p \frac{e^{-ikR}}{R} d\tau_1 ; \qquad \Pi^m = \int q \frac{e^{-ikR}}{R} d\tau_1 ,$$

wobei die Integration über das ganze Quellgebiet auszudehnen ist und R die Entfernung des Aufpunktes vom Quellpunkt ist. Für die Funktion $\frac{e^{-ikR}}{R}$ gilt die HEINEsche Entwicklung:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{1}{ik} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \frac{\psi_\nu(kr_1)}{r_1} \Phi_\nu^\mu(\vartheta,\varphi)\, \overline{\Phi}_\nu^\mu(\vartheta_1,\varphi_1);$$

r bzw. r_1 bedeuten hier die Entfernung das Aufpunktes bzw. Quellpunktes vom Koordinatenursprung. Die Entwicklung gilt für $r > r_1$; $\zeta_\nu(kr)$ und $\psi_\nu(kr)$ sind von DEBYE eingeführte Funktionen, für die die folgenden Reihenentwicklungen gelten *(2)*:

$$\zeta_\nu(kr) = i^{\nu+1} e^{-ikr} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \frac{(\nu+\varkappa)!}{(\nu-\varkappa)!\,\varkappa!} \frac{(-1)^\varkappa}{(2kr)^\varkappa}; \tag{18}$$

$$\psi_\nu(kr) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\varkappa}{2^\varkappa \varkappa!} \frac{1}{1.3.5.....(2\nu+2\varkappa+1)} (kr)^{\nu+1+2\varkappa} \tag{19}$$

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$p_{\nu\mu} = \frac{1}{ik} \frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!} \int p \frac{\psi_\nu(kr_1)}{r_1} \overline{\Phi}_\nu^\mu(\vartheta_1, \varphi_1) d\tau_1 ; \tag{20}$$

$$q_{\nu\mu} = \frac{1}{ik} \frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!} \int q \frac{\psi_\nu(kr_1)}{r_1} \overline{\Phi}_\nu^\mu(\vartheta_1 \varphi_1) d\tau_1 . \tag{21}$$

Wir erhalten dann für die Potentiale der elektrischen bzw. magnetischen Strahlung ausserhalb des Quellgebietes die folgenden Ausdrücke:

$$\Pi^e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} p_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \Phi_\nu^\mu(\vartheta, \varphi); \quad \Pi^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} q_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \Phi_\nu^\mu(\vartheta, \varphi) .$$

Wir benennen

$$\Pi_{\nu\mu}^e = p_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \Phi_\nu^\mu (\vartheta, \varphi), \tag{22}$$

bzw.

$$\Pi_{\nu\mu}^m = q_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \Phi_\nu^\mu (\vartheta, \varphi) \tag{23}$$

das Potential der μ-ten Komponente der elektrischen bzw. magnetischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν. Es ist offenbar das Potential der gesamten elektrischen bzw. magnetischen Strahlung gleich der Summe der Potentiale der einzelnen elektrischen bzw. magnetischen Multipolstrahlungen, da

$$\Pi^e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \Pi_{\nu\mu}^e, \qquad \Pi^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \Pi_{\nu\mu}^m$$

ist.

4. *Bestimmung der Feldstärken*

Wir betrachten das elektromagnetische Feld. Da ausserhalb des Quellgebietes:

$$\Delta\Pi + k^2 \Pi = 0 \tag{24}$$

gilt so vereinfacht sich der Ausdruck (9) für die elektrische Feldstärke der elektrischen Strahlung. Eine einfache Rechnung ergibt allgemein:

$$rot\, rot\, \vec{r}\, \Pi = \vec{grad} \frac{\partial r\Pi}{\partial r} - \vec{r} \Delta\Pi .$$

Diese Gleichung ergibt in Verbindung mit Gl. (24) und (9):

$$\vec{E}^e = rot\, rot\, \vec{r}\, \Pi^e . \tag{24a}$$

Für die Feldstärken der μ-ten Komponente der elektrischen bzw. magnetischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν erhalten wir aus (8), (10), (22) und (23):

$$\vec{H}^e_{\nu\mu} = -\, ikp_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \left[\vec{r}, \vec{grad}\, \Phi^\mu_\nu\right]; \quad \vec{E}^e_{\nu\mu} = \frac{1}{ik}\, rot\, \vec{H}^e_{\nu\mu}; \tag{25}$$

$$\vec{E}^m_{\nu\mu} = ikq_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} \left[\vec{r}, \vec{grad}\, \Phi^\mu_\nu\right]; \quad \vec{H}^e_{\nu\mu} = -\frac{1}{ik}\, rot\, \vec{E}^e_{\nu\mu}. \tag{26}$$

Es ist natürlich

$$\vec{E}^e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \vec{E}^e_{\nu\mu}; \quad \vec{H}^e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \vec{H}^e_{\nu\mu}; \quad \vec{E}^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \vec{E}^m_{\nu\mu}; \quad \vec{H}^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} \vec{H}^m_{\nu\mu}:$$

die Feldstärke der elektrischen bzw. magnetischen Strahlung gleich der Summe der Feldstärken der einzelnen elektrischen bzw. magnetischen Multipolstrahlungen. Aus der Gleichungen (25) und (26) ersehen wir die vollkommene Analogie zwischen der magnetischen Feldstärke der elektrischen Strahlung und der elektrischen Feldstärke der magnetischen Strahlung.

Aus den Gl. (25) und (26) entnehmen wir ferner, dass die kartesischen Komponenten der magnetischen Feldstärke der elektrischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν, ebenso wie die kartesischen Komponenten der elektrischen Feldstärke der magnetischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν, wegen (14) und (15) nur Kugelfunktionen der Ordnung ν enthalten.

5. *Bestimmung der Koeffizienten $p_{\nu\mu}$ und $q_{\nu\mu}$*

Die durch die Gl. (20) und (21) definierten Koeffizienten $p_{\nu\mu}$ und $q_{\nu\mu}$ lassen sich bestimmen, wenn man die in Absatz 2*d* angegebene Bestimmung der Funktionen p und q vornimmt. Wir wollen aber hier Formeln angeben, die es direkt erlauben, aus dem Stromdichtevektor bzw. aus der Ladungsdichte die Koeffizienten $p_{\nu\mu}$ und $q_{\nu\mu}$ zu berechnen ohne den Umweg über die Funktionen p und q. Wegen

$$\int Lp \frac{\psi_\nu}{r} \overline{\Phi}^\mu_\nu d\tau = \nu(\nu+1) \int p \frac{\psi_\nu}{r} \overline{\Phi}^\mu_\nu d\tau$$

und

$$\int Lq\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\,d\tau=\nu(\nu+1)\int q\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\,d\tau$$

wird nämlich, bei Berücksichtigung der Gl. (12), (13) und (13a),

$$p_{\nu\mu}=\frac{1}{ik}\frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!}\frac{1}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{ik}\int\vec{r}\,rot\,rot\,\vec{I}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\,d\tau \tag{27}$$

und

$$q_{\nu\mu}=\frac{1}{ik}\frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!}\frac{1}{\nu(\nu+1)}\int\vec{r}\,rot\,\vec{I}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\,d\tau \tag{28}$$

sein. Diese Gleichungen lassen sich durch Benützung des GAUSSschen Satzen umformen. Da nämlich

$$\vec{r}\,rot\,rot\,\vec{I}=-\,div\,[\vec{r},rot\,\vec{I}],$$

so erhalten wir bei doppelter Anwendung des GAUSSschen Satzes auf das in $p_{\mu\nu}$ auftretende Integral

$$U_{\nu\mu}=\frac{1}{ik}\int\vec{r}\,rot\,rot\,\vec{I}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\,d\tau$$

die Gleichung:

$$U_{\nu\mu}=\frac{1}{ik}\int\vec{I}\,rot\,rot\left(\vec{r}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right)d\tau.$$

Nun ist aber

$$rot\,rot\left(\vec{r}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right)=\overrightarrow{grad}\,div\,\vec{r}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu-2\,\overrightarrow{grad}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu-\vec{r}\Delta\left(\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right),$$

was wegen

$$\Delta\left(\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right)+k^2\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu=0$$

die folgende Gleichung ergibt:

$$U_{\nu\mu}=\frac{1}{ik}\int\vec{I}\left\{\overrightarrow{grad}\left(\frac{d\psi_\nu}{dr}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right)+k^2\vec{r}\frac{\psi_\nu}{r}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right\}d\tau. \tag{29}$$

Wir betrachten die beiden Glieder in (29) gesondert und führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$U_{\nu\mu}^1=\frac{1}{ik}\int\vec{I}\,\overrightarrow{grad}\left(\frac{d\psi_\nu}{dr}\overline{\Phi}_\nu^\mu\right)d\tau;$$

$$U_{\nu\mu}^2=-\,ik\int I_r\psi_\nu\overline{\Phi}_\nu^\mu\,d\tau. \tag{30}$$

Dann ist

$$U_{\nu\mu} = U^1_{\nu\mu} + U^2_{\nu\mu}. \tag{31}$$

Das Integral $U^1_{\nu\mu}$ lässt sich weiter durch eine nochmalige Anwendung des GAUSSschen Satzes bei Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2) vereinfachen. Man erhält:

$$U^1_{\nu\mu} = \int \rho \frac{d\psi_\nu(kr)}{dr} \overline{\Phi}^\mu_\nu \, d\tau . \tag{32}$$

Wir erhalten schliesslich aus (27), (29), (30), (31), und (32):

$$p_{\nu\mu} = \frac{1}{ik} \frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \left\{ \int \rho \frac{d\psi_\nu(kr)}{dr} \overline{\Phi}^\mu_\nu \, d\tau - ik \int I_r \psi_\nu(kr) \, \overline{\Phi}^\mu_\nu \, d\tau \right\}. \tag{33}$$

Das Feld der elektrischen Strahlung ist also durch die Ladungsdichte und den Radialteil des Stromdichtefeldes bereits eindeutig bestimmt.

Wir werden am Ende dieser Arbeit an einem wellenmechanischen Beispiel sehen, dass das Integral $U^2_{\nu\mu}$ oft von kleinerer Grössenordnung als das Integral $U^1_{\nu\mu}$ ist.

Auch das in $q_{\nu\mu}$ auftretende Integral

$$V_{\nu\mu} = \int \vec{r} \, rot \, \vec{I} \frac{\psi_\nu}{r} \overline{\Phi}^\mu_\nu \, d\tau$$

lässt sich durch Anwendung des GAUSSschen Satzes auf die oft bequemere Form

$$V_{\nu\mu} = \int [\vec{r}, \vec{I}] \, \vec{grad} \left(\frac{\psi_\nu}{r} \overline{\Phi}^\mu_\nu \right) d\tau \tag{34}$$

bringen. Die letzte Gleichung können wir auch folgendermassen schreiben:

$$V_{\nu\mu} = \int \vec{I} \left[\vec{r}, \vec{grad} \, \overline{\Phi}^\mu_\nu \right] \frac{\psi_\nu}{r} d\tau. \tag{35}$$

Es sei bemerkt, dass die Komponenten des Vektors

$$\vec{C} = \left[\vec{r}, \vec{grad} \, \overline{\Phi}^\mu_\nu \right]$$

wieder Kugelfunktionen der Ordnung ν sind. Und zwar ist mit den Bezeichnungen des Absatzes 2e):

$$(\overline{C})_1 = i(\nu+\mu)\,\overline{\Phi}_\nu^{\mu-1}\;;\quad (\overline{C})_2 = i\,(\nu-\mu)\,\overline{\Phi}_\nu^{\mu+1}\;;\quad (\overline{C})_3 = -\,i\mu\,\overline{\Phi}_\nu^{\mu}$$

und folglich:

$$q_{\nu\mu} = \frac{1}{2k}\,\frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!\,(\nu-\mu)!}\,\frac{1}{\nu(\nu+1)}\int\Big\{(\nu-\mu)I_1\overline{\Phi}_\nu^{\mu+1} + (\nu+\mu)\,I_2\,\overline{\Phi}_\nu^{\mu-1} -$$

$$-\,2\mu\,I_3\overline{\Phi}_\nu^{\mu}\Big\}\,\frac{\psi_\nu(kr)}{r}\,d\tau. \qquad (36)$$

6. *Die retardierten Potentiale*

Bei vielen Anwendungen benötigt man die Ausdrücke für die retardierten Potentiale φ und $\vec{A}$, aus denen sich die Feldstärken zu

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{grad}\,\varphi - ik\,\vec{A}\,;\quad \vec{H} = rot\,\vec{A}$$

ergeben. Diese Potentiale sind aber nicht eindeutig bestimmt, da

$$\varphi' = \varphi + ik\lambda\,;\qquad \vec{A}' = \vec{A} - \overrightarrow{grad}\,\lambda$$

dieselben Feldstärken ergeben, wie φ und $\vec{A}$. Die retardierten Potentiale genügen der Zusatzgleichung

$$div\,\vec{A} + ik\varphi = 0\,,$$

aus der sich für die freigebliebene Funktion λ die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\Delta\lambda + k^2\lambda = 0\,.$$

Wegen dieser Mehrdeutigkeit kann man mehrere Ausdrücke für die retardierten Potentiale der μ-ten Komponente der elektrischen bzw. magnetischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν angeben. Am einfachsten haben wir die folgenden Ausdrücke gefunden:

$$\vec{A}^{e}_{\nu\mu} = ip_{\nu\mu}\,\frac{\zeta_{\nu-1}}{r^\nu}\,\overrightarrow{grad}\;r^\nu\Phi_\nu^\mu\,;\quad \varphi^e_{\nu\mu} = \nu p_{\nu\mu}\,\frac{\zeta_\nu}{r}\,\Phi_\nu^\mu$$

für die μ-te Komponente der elektrischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν und

$$\vec{A}^{m}_{\mu\nu} = -\,q_{\nu\mu}\,\frac{\zeta_\nu}{r}\left[\vec{r},\,\overrightarrow{grad}\;\Phi_\nu^\mu\right];\quad \varphi^m_{\nu\mu} = 0$$

für die μ-te Komponente der magnetischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^ν.

7. *Das elektromagnetische Feld in der Wellenzone*

Das elektromagnetische Feld der elektrischen bzw. magnetischen Multipolstrahlung in der Wellenzone ergibt sich einfach daraus, dass für $kr \gg 1$ die Funktion $\zeta_\nu(kr)$ in genügender Näherung gemäss (18) durch

$$\zeta_\nu(kr) \infty i^{\nu+1} e^{-ikr}$$

ersetzt werden kann. Wir erhalten dann für die Feldstärken der elektrischen Multipolstrahlung:

$$\vec{E}^e_{\mu\nu} = ki^\nu p_{\nu\mu} e^{-ikr} \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu; \quad \vec{H}^e_{\nu\mu} = \left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{E}^e_{\nu\mu}\right] = ki^\nu p_{\nu\mu} e^{-ikr} \left[\frac{\vec{r}}{r}, \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu\right] \quad (37)$$

und für die Feldstärken der magnetischen Multipolstrahlung:

$$\vec{E}^m_{\nu\mu} = -\, ki^\nu q_{\nu\mu} e^{-ikr} \left[\frac{\vec{r}}{r} \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu\right]; \vec{H}^m_{\nu\mu} = \left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{E}^m_{\nu\mu}\right] = ki^\nu p_{\nu\mu} e^{-ikr} \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu \quad (38)$$

8. *Intensität des ausgestrahlten Lichtes*

Die Intensität I des in einer bestimmten Richtung ausgestrahlten Lichtes wird durch den Zeitmittelwert der Projektion des POYNTINGschen Vektors in diese Richtung bestimmt. Wir bezeichnen mit $\vec{r}_0$ den einheitsvektor von $\vec{r}$ und mit $\vec{S}$ den POYNTINGschen Vektor. Dann wird:

$$\mathsf{I} = \widehat{\vec{r}_o \vec{S}} = \frac{c}{4\pi} \vec{r}_o \widehat{[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]} = \frac{c\, \vec{r}_o}{4\pi} \left\{ \left[\vec{E}, \overline{\vec{H}}\right] + \left[\overline{\vec{E}}, \vec{H}\right] \right\},$$

wobei $\wedge$ die Zeitmittelwertbildung anzeigt.
In der Wellenzone erhalten wir gemäss (37) und (38):

$$\mathsf{I} = \frac{c}{2\pi} \vec{E}\, \overline{\vec{E}} = \frac{c}{2\pi} \vec{H}\, \overline{\vec{H}}$$

Wir können nun I in drei Teile zerlegen:

$$\mathsf{I} = \mathsf{I}^e + \mathsf{I}^m + \mathsf{I}^g,$$

wobei

$$\mathfrak{l}^e = \frac{c}{2\pi} \sum_{\nu\mu} \sum_{\alpha\beta} \vec{E}^e_{\nu\mu} \overline{\vec{E}}^e_{\alpha\beta} = \frac{c}{2\pi} \sum_{\nu\mu} \sum_{\alpha\beta} \vec{H}^e_{\nu\mu} \overline{\vec{H}}^e_{\alpha\beta} \tag{39}$$

der von der elektrischen Strahlung herrührende Anteil von $\mathfrak{l}$,

$$\mathfrak{l}^m = \frac{c}{2\pi} \sum_{\nu\mu} \sum_{\alpha\beta} \vec{E}^m_{\nu\mu} \overline{\vec{E}}^m_{\alpha\beta} = \frac{c}{2\pi} \sum_{\nu\mu} \sum_{\alpha\beta} \vec{H}^m_{\nu\mu} \overline{\vec{H}}^m_{\alpha\beta} \tag{40}$$

der von der magnetischen Strahlung herrührende Anteil von $\mathfrak{l}$ ist, während

$$\mathfrak{l}^g = \frac{c}{2\pi} \sum_{\nu\mu} \sum_{\alpha\beta} \left(\vec{H}^e_{\nu\mu} \overline{\vec{H}}^m_{\alpha\beta} + \overline{\vec{H}}^e_{\nu\mu} \vec{H}^m_{\alpha\beta} \right)$$

die gemischten Glieder enthält und immer dann verschwindet, wenn nur eine der beiden betrachten Strahlungen vorhanden ist.

Die Gesamtintensität W des ausgestrahlten Lichtes erhalten wir durch die Integration von $\mathfrak{l}$ über eine Kugeloberfläche von beliebigem Radius r:

$$W = \int \mathfrak{l} r^2 d\omega = \int \mathfrak{l}^e r^2 d\omega + \int \mathfrak{l}^m r^2 d\omega + \int \mathfrak{l}^g r^2 d\omega$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$W^e = \int \mathfrak{l}^e r^2 d\omega; \quad W^m = \int \mathfrak{l}^m r^2 d\omega; \quad W^g = \int \mathfrak{l}^g r^2 d\omega \tag{41}$$

und beweisen zunächst, dass

$$W^g = 0 \tag{42}$$

ist. Es ist nämlich:

$$\vec{H}^e_{\nu\mu} \overline{\vec{H}}^m_{\alpha\beta} = -k^2 i^{\nu-\alpha} p_{\nu\mu} \overline{q}_{\alpha\beta} \left[\frac{\vec{r}}{r}, \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu \right] \overrightarrow{grad}\, \overline{\Phi}^\beta_\alpha =$$

$$= k^2 i^{\nu-\alpha} p_{\nu\mu} \overline{q}_{\alpha\beta} \frac{\vec{r}}{r} rot \left(\overline{\Phi}^\beta_\alpha \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu \right),$$

also

$$\int \vec{H}^e_{\nu\mu} \overline{\vec{H}}^m_{\alpha\beta} r^2 d\omega = k^2 i^{\nu-\alpha} p_{\nu\mu} \overline{q}_{\alpha\beta} \int rot \left(\overline{\Phi}^\alpha_\beta \overrightarrow{grad}\, \Phi^\mu_\nu \right) \vec{r}\, r d\omega = 0.$$

Da W^g durch eine Summe von Gliedern dieser Art gegeben ist, so haben wir hiermit Gl. (42) bewiesen. Die gesamte von einem System ausgestrahlte Energie ist also gleich der Summe der Energien, die von der elektrischen und magnetischen Strahlung ausgesandt werden.

Wir berechnen nun die Intensität der elektrischen Strahlung. Es ist gemäss (37), (39) und (41):

$$W^e = \frac{c}{2\pi} k^2 \sum_{\nu\mu} \sum_{\alpha\beta} i^{\nu-\alpha} p_{\nu\mu} \overline{p}_{\alpha\beta} \int \left(\nabla \Phi^{\mu}_{\nu} \nabla \overline{\Phi}^{\beta}_{\alpha} \right) r^2 d\omega \,.$$

Das hier auftretende Integral berechnen wir, indem wir berücksichtigen, dass:

$$\nabla \Phi^{\mu}_{\nu} \nabla \overline{\Phi}^{\beta}_{\alpha} = div\left(\overline{\Phi}^{\beta}_{\alpha} \, \overrightarrow{grad} \, \Phi^{\mu}_{\nu} \right) + \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} \overline{\Phi}^{\beta}_{\alpha} \Phi^{\mu}_{\nu}$$

und folglich

$$\int \left(\nabla \Phi^{\mu}_{\nu} \, \nabla \overline{\Phi}^{\beta}_{\alpha} \right) r^2 d\omega = \nu(\nu+1) \int \Phi^{\mu}_{\nu} \overline{\Phi}^{\beta}_{\alpha} \, d\omega =$$

$$= \nu(\nu+1)(\nu+\mu)!\,(\nu-\mu)!\,\frac{4\pi}{2\nu+1} \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta}$$

ist. Wir erhalten also schliesslich:

$$W^e = 2ck^2 \sum_{\nu\mu} \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1} (\nu+\mu)!\,(\nu-\mu)!\,|p_{\nu\mu}|^2 .$$

Wir ersehen daraus, dass die Gesamtintensität der elektrischen Strahlung gleich ist der Summe der Intensitäten der einzelnen elektrischen Multipolstrahlungen. Dasselbe gilt für die magnetische Multipolstrahlung, deren Gesamtintensität durch:

$$W^m = 2ck^2 \sum_{\nu\mu} \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1} (\nu+\mu)!\,(\nu-\mu)!\,|q_{\nu\mu}|^2$$

gegeben ist. Wir können also

$$W^e = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} W^e_{\nu\mu}$$

und

$$W^m = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} W^m_{\nu\mu}$$

setzen, wobei

$$W^e_{\nu\mu} = 2ck^2 \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1} (\nu+\mu)!\,(\nu-\mu)!\,|p_{\nu\mu}|^2$$

und

$$W^{m}_{\nu\mu} = 2ck^2 \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1)} (\nu+\mu)!\,(\nu-\mu)!\,|q_{\nu\mu}|^2$$

ist.

9. *Der ZEEMANeffekt der Multipolstrahlung*

Die bisherigen Überlegungen waren ganz allgemein gehalten und galten für beliebige Strahler. Wir gehen nun zu Atomproblemen über und wollen den ZEEMANeffekt einer Atomlinie betrachten, wenn diese Atomlinie einer (elektrischen oder magnetischen) Multipolstrahlung beliebiger Ordnung zukommt.

Wir betrachten einen mit Strahlung verbundenen Übergang eines Atoms aus einem Zustand a in einen Zustand b und bezeichnen mit m die magnetische Quantenzahl des oberen und mit m' die des unteren Zustandes. Es ist dann ohne weiteres einzusehen, dass die μ-te Komponente der (elektrischen oder magnetischen) Multipolstrahlung jenem Übergang zukommt, für den:

$$m' - m = \mu$$

ist.

Wir betrachten zunächst den ZEEMANeffekt einer elektrischen Multipolstrahlung der Ordnung 2^{ν}. Wir führen zu dem Zweck nach RUBINOWICZ *(4)* im Beobachtungspunkte drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ ein, die ein Rechtssystem bilden. $\vec{i'}$ möge die Richtung des Radiusvektors $\vec{r}$ besitzen, $\vec{j'}$ mit der Tangente des Breitekreises zusammenfallen und in die Richtung wachsender φ hinweisen. Das äussere Magnetfeld weise in die positive z-Richtung. Für das magnetische Feld der e l e k t r i s c h e n M u l t i p o l s t r a h l u n g erhalten wir dann die folgende Darstellung:

$$\vec{H}^{e}_{\nu\mu} = \gamma_{\nu\mu}\Big\{(\nu+\mu)(\vec{j'} + i\vec{k'}\cos\vartheta)\,P^{\mu-1}_{\nu}(\cos\vartheta) -$$

$$-(\nu-\mu)(\vec{j'} - i\vec{k'}\cos\vartheta)\,P^{\mu+1}_{\nu}(\cos\vartheta) -$$

$$-2\mu\vec{k'}\sin\vartheta\,P^{\mu}_{\nu}(\cos\vartheta), \qquad (43)$$

wobei P^{μ}_{ν} durch die Gleichung:

$$\Phi^{\mu}_{\nu}(\vartheta,\varphi) = P^{\mu}_{\nu}(\cos\vartheta)\,e^{i\mu\varphi}$$

definiert und

$$\gamma_{\nu\mu} = -\frac{ik}{2} p_{\nu\mu} \frac{\zeta_\nu(kr)}{r} e^{i\mu\varphi}$$

ist. Das erste der drei Glieder in (43) ergibt eine rechtselliptisch polarisierte Welle (ausgenommen für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, wo der elektrische Vektor in diesem Falle parallel zur Feldrichtung polarisiert ist), das zweite eine linkselliptisch polarisierte Welle (ausgenommen für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, wo wir wieder in diesem Falle eine π-Komponente erhalten), während das dritte Glied eine σ-Komponente darstellt.

Die Intensitäten der einzelnen ZEEMANkomponenten ergeben sich für jeden Winkel ϑ direkt aus (43).

Wir wollen hier etwas genauer den longitudinalen und den transversalen ZEEMANeffekt betrachten. Für den Längseffekt erhalten wir nach Einsetzen von $\vartheta = 0$ und Berücksichtigung, dass

$$P_\nu^\mu(1) = \nu!\, \delta_{\mu,0}$$

ist, für $\vec{H}^e_{\nu\mu}$ den Ausdruck

$$\vec{H}^e_{\nu\mu} = \gamma_{\nu\mu} (\nu+1)! \left\{ (\vec{j} + i\vec{k})\, \delta_{\mu,1} - (\vec{j} - i\vec{k})\, \delta_{\mu,-1} \right\},$$

welcher anzeigt, dass wir im Längseffekt nur rechts- bzw. linkszirkularpolarisierte Komponenten zu erwarten haben, die den Übergängen $m \to m+1$ bzw. $m \to m-1$ entsprechen.

Wir geben zum Quereffekt über. Wir haben $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zu setzen und erhalten für $\vec{H}^e_{\nu\mu}$ den Ausdruck:

$$\vec{H}^e_{\nu\mu} = \gamma_{\nu\mu} \left\{ \vec{j} \left\{ (\nu+\mu) P_\nu^{\mu-1}(0) - (\nu-\mu) P_\nu^{\mu+1}(0) \right\} - \vec{k}\, 2\mu P_\nu^\mu(0) \right\}. \quad (44)$$

Es ist nun

$$P_\nu^\mu(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu-\mu \text{ ungerade Zahl,} \\ (-1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} \dfrac{(\nu-\mu)!\,(\nu+\mu)!}{2^\nu \left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)! \left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)!} & \text{für } \nu-\mu \text{ gerade Zahl,} \end{cases}$$

so dass wir, für ungerades $\nu-\mu$, π-Komponenten, dagegen, für gerade Werte von $\nu-\mu$, σ-Komponenten erhalten. Da das zweite Glied in (44)

den Faktor μ enhält, so haben wir im Quereffekt für gerades ν (also z. B. für die Quadrupolstrahlung) keine $m \to m$ - Komponenten. Für ungerade Werte von ν (also z. B. die elektrische Dipolstrahlung oder die elektrische Oktupolstrahlung) erscheinen die $m \to m$ - Komponenten immer parallel polarisiert.

Alle unsere Ergebnisse lassen sich mit geringen Modifikationen auf die magnetische Multipolstrahlung übertragen. Wir haben nur in den im letzten Abschnitt angeführten Formeln $\overrightarrow{H^e_{\nu\mu}}$ durch $\overrightarrow{E^m_{\nu\mu}}$ zu ersetzen. Das erste Glied in (44) gibt dann wieder rechtszirkular polarisierte Komponente ausser für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, in welchem Falle wir nun σ-Komponenten erhalten. Das zweite Glied gibt linkszirkular polarisierte Komponenten und für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, σ-Komponenten. Das dritte Glied gibt endlich π-Komponenten. Wir haben also bloss π durch σ und σ durch π zu ersetzen um die Polarisation der ZEEMANkomponenten einer magnetischen Multipolstrahlung zu erhalten. Die Intensitätsverhältnisse der einzelnen Komponenten sind dagegen dieselben wie bei der elektrischen Multipolstrahlung derselben Ordnung.

10. *Ein wellenmechanisches Beispiel*

Wir wollen die elektrische Multipolstrahlung untersuchen, die bei Übergang eines Atoms zwischen zwei Quantenzuständen ausgestrahlt wird,

Wir betrachten ein Elektron in einem zentralen Kraftfelde, wobei wir den Spin vernachlässigen. Die SCHRÖDINGERschen Eigenfunktionen der Zustände a und b mit den azimutalen Quantenzahlen l und l' und den magnetischen Quantenzahlen m und m' lauten dann:

$$\psi_a = R_{al}(r) \frac{1}{\sqrt{N_{lm}}} \overline{\Phi}^m_l(\vartheta, \varphi); \qquad \psi_b = R_{bl'}(r) \frac{1}{\sqrt{N_{l'm'}}} \overline{\Phi}^{m'}_{l'}(\vartheta, \varphi);$$

wobei

$$N_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} (l-m)!\,(l+m)!$$

der zu ϑ und φ gehörige Normierungsfaktor ist.

Betrachten wir zunächst die elektrische Multipolstrahlung. Sie ist, wie wir bereits wissen, durch die Ladungsdichte ρ und den Radialteil der Stromdichte I_r bestimmt. Für den Übergang $a \to b$ sind ρ und I_r durch

$$\rho = -R_{al} R_{bl'} \frac{1}{\sqrt{N_{lm} N_{l'm'}}} \overline{\Phi}^m_l \overline{\Phi}^{m'}_{l'},$$

$$I_r = \frac{ie}{2K}\left(R_{al}\frac{dR_{bl'}}{dr} - R_{bl'}\frac{dR_{al}}{dr}\right)\frac{1}{\sqrt{N_{lm}N_{l'm'}}}\overline{\Phi}_{ll'}^{mm'}$$

gegeben, wobei $K = \frac{2\pi mc}{h}$ die mit 2π multiplizierte Wellenzahl der COMPTONwellenlänge ist. Die in (33) auftretenden Integrale $U^1_{\nu\mu}$ und $U^2_{\nu\mu}$ lauten in diesem Falle:

$$U^1_{\nu\mu} = -eA^{mm'\mu}_{ll'\nu}\int R_{al}R_{bl'}\frac{d\psi_\nu}{dr}r^2dr, \tag{45}$$

$$U^2_{\nu\mu} = -eA^{mm'\mu}_{ll'\nu}\left(-\frac{k}{2K}\right)\int\left(R_{al}\frac{dR_{bl'}}{dr} - R_{bl'}\frac{dR_{al}}{dr}\right)\psi_\nu r^2dr, \tag{46}$$

wobei

$$A^{mm'\mu}_{ll'\nu} = \frac{1}{\sqrt{N_{lm}N_{l'm'}}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\,\overline{\Phi}^m_l\,\Phi^{m'}_{l'}\,\overline{\Phi}^\mu_\nu$$

ist. Man findet dieses Integral bei GAUNT (*1*) berechnet. Es ist nur dann von Null verschieden, wenn

$$m' - m = \mu$$

und ν eine der folgenden Zahlen:

$$\nu = |l - l'|,\ |l - l'| + 2,\ \ldots..,\ l + l'$$

ist. Dieses Integral bestimmt die Intensitäten der ZEEMAN-Komponenten.

Das Integral

$$M = -\frac{k}{2K}\int\left(R_{al}\frac{dR_{bl'}}{dr} - R_{bl'}\frac{dR_{al}}{dr}\right)\psi_\nu r^2dr$$

in (46) formen wir vermittelst der aus der SCHRÖDINGERgleichung folgenden Identität: (*6*)

$$\int\left(R_{al}\frac{dR_{bl'}}{dr} - R_{bl'}\frac{dR_{al}}{dr}\right)(kr)^j r^2dr = \frac{-2K}{j+1}\left\{\int R_{al}R_{bl'}(kr)^{j+1}r^2dr - \right.$$

$$\left. - [l(l+1) - l'(l'+1)]\frac{k}{2K}\int R_{al}R_{bl'}(kr)^{j-1}r^2dr\right\}$$

und der Reihenentwicklung (19) zu

$$M = k\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\varkappa}{2^\varkappa\varkappa!(\nu+2\varkappa+2)1.3....(2\nu+\varkappa+1)}\left\{\int R_{al}R_{bl'}(kr)^{\nu+2\varkappa+2}r^2dr -\right.$$

$$-\frac{k}{2K}[l(l+1)-l'(l'+1)]\int R_{al}R_{bl'}(kr)^{\nu+2\varkappa}r^2\mathrm{d}r\Big\}$$

um. Wir erhalten so schliesslich, bei Berücksichtigung der aus (19) folgenden Reihenentwicklung

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\nu}{\mathrm{d}r}=k\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{\varkappa}\frac{\nu+1+2\varkappa}{2^{\varkappa}\varkappa!1.3.5...(2\nu+2\varkappa+1)}(kr)^{\nu+2\varkappa}$$

fur $p_{\nu\mu}$ den Ausdruck:

$$p_{\nu\mu}=ie\frac{2\nu+1}{(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!}A_{ll'\nu}^{mm'\mu}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa}}{2^{\varkappa}\varkappa!1.3...(2\nu+2\varkappa+1)}\Big\{\frac{1}{\nu+2\varkappa}-$$

$$-\frac{k}{K}\frac{l(l+1)-l'(l'+1)}{2\nu(\nu+1)(\nu+2\varkappa+2)}\Big\}\int R_{al}R_{bl'}(kr)^{\nu+2\varkappa}r^2\mathrm{d}r. \qquad (47)$$

Es wird im allgemeinen genügen, sich in (47) auf das erste Glied mit $\varkappa=0$ zu beschränken. Wir erhalten dann:

$$p_{\nu\mu}=ie\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+\mu)!(\nu-\mu)!}A_{ll'\nu}^{mm'\mu}\frac{1}{1.3...(2\nu+1)}$$

$$\Big\{1-\frac{k}{K}\frac{l(l+1)-l'(l'+1)}{2\ (\nu+1)(\nu+2)}\Big\}\int R_{al}R_{bl'}(kr)^{\nu}r^2\mathrm{d}r.$$

Das zweite Glied rührt hier von dem Integral $U_{\nu\mu}^2$ her. Wir können es immer dann vernachlässigen, wenn die Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes gross gegenüber der COMPTONwellenlänge $\Lambda=\frac{h}{mc}$ ist.

Streszczenie

Autor pokazuje, jak można rozłożyć pole elektromagnetyczne—pochodzące od periodycznie zmiennych gęstości ładunków i prądów—na promieniowania multipoli elektrycznych i magnetycznych. Każde z promieniowań multipolowych wyznaczone jest przez jedną tylko funkcję skalarną, dla której otrzymuje się proste związki. Zastosowanie otrzymanych wyników w mechanice kwantowej pozwala na łatwe obliczenie zjawiska ZEEMANA dla dowolnego promieniowania multipolowego.

Wedle rozwiniętej tu teorji już promieniowanie elektryczne dipolowe nie jest wyznaczone przez sam tylko rozkład ładunków. Wobec tego powstają przy stosowaniu otrzymanych wzorów natężeniowych do

promieniowania elektryczno-dipolowego w jedno-elektronowym zagadnieniu SCHRÖDINGERA odstępstwa od zwykłych wzorów natężeniowych. Odstępstw tych nie można zaniedbać, gdy długość fali światła wypromieniowanego jest rzędu długości fali COMPTONA.

Literaturverzeichnis

1. GAUNT, J. A.: *Phil. Trans.* **228**, 193 (1928).
2. DEBYE, P.: *Ann. der Phys.* **30**, 57 (1909).
3. MIE, G.: *Ann. der Phys.* **25**, 382 (1908).
4. RUBINOWICZ, A.: *ZS. f. Phys.* **61**, 338 (1930).
5. RUBINOWICZ, A. und BLATON, J.: *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, **XI**, 176—217 (1932). Dort weitere Literatur.
6. TAYLOR, H. M. and MOTT, N. F.: *Proc. Roy. Soc.* (A) **128**, 665 (1932).

Adiabatische Magnetostriktion des flüssigen Sauerstoffes*

Magnetostrykcja adiabatyczna ciekłego tlenu

Von M. WOLFKE, Physikalisches Institut I der Techn. Hochschule, Warschau

(*Eingegangen am 17. November 1937*)

Es wurde ein Versuch zur Beobachtung der Volumenveränderung des flüssigen Sauerstoffes bei adiabatischer Magnetisierung durchgeführt und dabei ein Volumenzuwachs festgestellt und provisorisch gemessen. Dieser Effekt, der zum ersten Mal beim flüssigen Sauerstoff beobachtet worden ist, wurde vom Verfasser „adiabatische Magnetostriktion" genannt und als Summe des magnetokalorischen Volumenzuwachses und der isothermen Magnetostriktion aufgefasst.

Aus den Messresultaten wurde theoretisch die Kompressibilität des flüssigen Sauerstoffes berechnet und der Wert $0{,}9 \cdot 10^{-3}$ cm^2/kg erhalten.

Die adiabatische Magnetisierung eines paramagnetischen Körpers bewirkt im Allgemeinen einen Volumenzuwachs, den wir hier als „adiabatische Magnetostriktion" bezeichnen wollen. Dieser Volumenzuwachs wird durch zwei Erscheinungen verursacht: durch die Magnetostriktion im gewöhnlichen Sinne, d. h., bei konstanter Temperatur, die wir weiter „isotherme Magnetostriktion" nennen werden, einerseits und durch den magnetokalorischen Effekt andererseits.

Wenn wir nämlich einen paramagnetischen Körper isotherm magnetisieren, so wächst sein Volumen und gleichzeitig wird eine bestimmte Wärmemenge erzeugt. Diese Wärmemenge wird beim isothermen Vorgang nach Aussen abgeführt, bei adiabatischer Magnetisierung dagegen bedingt diese Wärmemenge einen Temperaturzuwachs, der seinerseits einen weiteren Volumenzuwachs verursacht. Auf diese Weise wird der Volumenzuwachs des adiabatisch magnetisierten paramagnetischen Körpers zusammengesetzt aus

* Vorgetragen am 24. Febr. 1937 in der Sitzung der Akad. der Techn. Wiss. in Warschau [*C. R. de l'Acad. d. Sc. Techn. à Varsovie*, **4**, 162 (1937)] und am 28. Aug. 1937 in der 118. Jahresversammlung der Schweiz. Naturf. Ges. in Genf.

dem Volumenzuwachs bei isothermer Magnetisierung und aus der durch die magnetokalorische Erwärmung bedingten Ausdehnung des Körpers. Danach wird:

$$\Delta v = \Delta_1 v + \Delta_2 v \tag{1}$$

sein, wo Δv den gesamten Zuwachs des spezifischen Volumens des flüssigen Sauerstoffes bei adiabatischer Magnetostriktion, $\Delta_1 v$ denjenigen bei magnetokalorischem Effekt und $\Delta_2 v$ bei isothermer Magnetostriktion bedeuten.

In dem Diagramm (Fig. 1) sind die Vorgänge der Magnetostriktion bei paramagnetischen Körpern graphisch dargestellt. Die Kurve *AB* entspricht der adiabatischen Magnetostriktion, d. h., sie gibt das spezifische Volumen v des Körpers in Abhängigkeit von dem magnetisierenden äusseren Feld H an. Die adiabatische Magnetisierung bewirkt gleichzeitig einen Temperaturzuwachs ΔT, den sogenannten magnetokalorischen Effekt. Die beiden Isothermen *AC* und *DB* enstprechen der isothermen Magnetostriktion bei den Temperaturen T und $T+\Delta T$. Aus dem Diagramm ersehen wir, dass der Volumenzuwachs auf der Adiabate *AB* gleich der Summe des Volumenzuwachses auf der Isotherme *AC* und des durch den magnetokalorischen Effekt bedingten Volumenzuwachses *CB* ist. Der magnetokalorische Effekt ist so klein, dass wir in erster Näherung die beiden Isothermen *AC* und *DB* als parallele Kurven annehmen können und den Volumenzuwachs *CB* bei der Feldstärke H gleich dem Volumenzuwachs *AD* bei $H=0$ setzen dürfen, was schliesslich zu der Gleichung (1) führt.

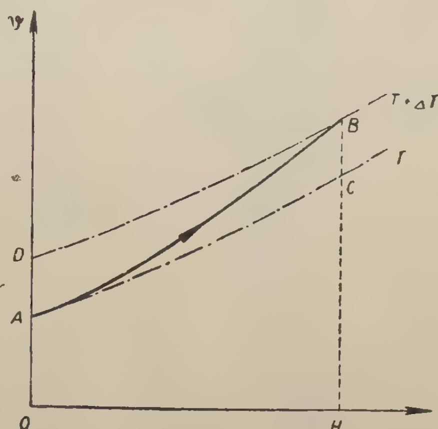


Fig. 1

Alle diese Erscheinungen wurden bis jetzt bei flüssigem Sauerstoff noch nicht untersucht, sind aber von grossem Interesse, sowohl für die Theorie des Paramagnetismus, als auch wegen der Bedeutung, welche speziell der magnetokalorische Effekt neuerdings für die Erzeugung sehr tiefer Temperaturen gewonnen hat.

In dieser Abhandlung sollen die Ergebnisse einer provisorischen Messung der adiabatischen Magnetostriktion des flüssigen Sauerstoffes mitgeteilt werden.

I. Apparatur und Messergebnisse

Der Volumenzuwachs bei der adiabatischen Magnetostriktion des flüssigen Sauerstoffes wurde in einem Spezialgefäss nach der Art eines Pyknometers im Kryostaten gemessen. Die Apparatur ist in der Fig. 2 dargestellt.

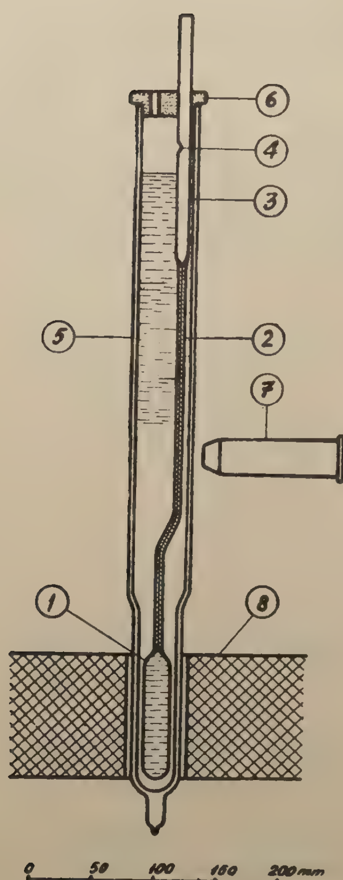


FIG. 2

Der flüssige Sauerstoff befindet sich im Pyknometergefäss 1 mit der Kapillare 2, welche in ein weiteres Rohr 3 mit der seitlichen Öffnung 4 mündet. Dieses Gefäss 1 mit der Kapillare 2 bildet eine Art offenen Pyknometers, das in dem ebenfalls mit flüssigem Sauerstoff gefüllten DEWARgefäss 5 am Bakelitdeckel 6 befestigt ist. Das Pyknometer und das DEWARgefäss sind aus Pyrex-glas angefertigt.

Der Stand des flüssigen Sauerstoffes im Pyknometer und sein Volumenzuwachs wird in der Kapillare 2 mit Hilfe des mit einem Mikrometerokular versehenen Mikroskops 7 beobachtet und gemessen.

Das Pyknometergefäss 1 befindet sich in der Achse einer eisenfreien Spule 8, die das entsprechende Magnetfeld erzeugt.

Das Volumen des Pyknometers wurde bei $20^0 C$ gemessen und betrug 23,48 cm^3. Der Versuch war jedoch bei $90^0 K$ ausgeführt und demnach musste das Anfangsvolumen des Pyknometers im Kryostat auf diese Temperatur umgerechnet werden, was den Wert 23,44 cm^3 ergab; dabei wurde für den linearen Ausdehnungskoeffizienten des Pyrexglases 0,000003 angenommen *(12)*.

Die Masse des flüssigen Sauerstoffes im Pyknometer berechnen wir aus dem Volumen des Pyknometers und der Dichte des flüssigen Sauerstoffes bei $90^0 K$, die wir nach DEWAR *(3)* gleich 1,118 setzen; wir erhalten 26,2 *gr*.

Das Volumen der Kapillare pro *mm* ihrer Länge wurde bei $21^0 C$ zu $1{,}146 . 10^{-4}$ cm^3/mm ermittelt und auf $90^0 K$ zu $1{,}145 . 10^{-4}$ cm^3/mm berechnet.

Die Ausmessung der Skala des Mikrometerokulars des Mikroskopes ergab 0,0294 *mm* der Objektlänge pro Teilstrichabstand der Skala. Demnach entspricht im Gesichtsfeld des Mikroskopes jedem Teilstrichabstand des Mikrometerokulars ein Volumen der Kapillare von $3{,}37 . 10^{-6}$ cm^3 bei $90^0 K$.

Die Spule zur Erzeugung des Magnetfeldes war aus einem 4 *mm* starken Kupferdraht gewickelt und besitzte 1034 Windungen mit 1,2 Ω Gesamtwiderstand. Die magnetische Feldstärke im Innern der Spule wurde bei 180 *A* Stromstärke mittels einer kleinen Induktionspule von 10 Windungen

und 11,9 *mm* Durchmesser mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers ausgemessen. Die, längs der Spulenachse, in dem Teil, wo sich das Pyknometergefäss befindet, erhaltenen Werte sind in der Fig. 3 dargestellt. Wir sehen, dass das Magnetfeld nicht ganz homogen war, daher musste man für die weiteren Berechnungen durch Planimetrieren den Mittelwert des Quadrates der magnetischen Feldstärke für das Pyknometergebiet ermitteln, was folgenden Wert ergab: $5{,}5 . 10^7$ Oersted.

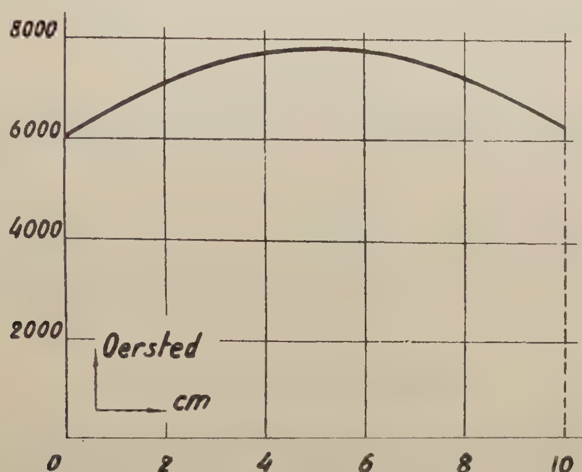


FIG. 3

Die Messung der adiabatischen Magnetostriktion des flüssigen Sauerstoffes ist in folgender Weise ausgeführt worden. Nachdem das Pyknometer im DEWARgefäss auf die Temperatur des Siedepunktes des flüssigen Sauerstoffes unter Barometerdruck abgekühlt worden war, wurde das Pyknometer mit reinem filtrierten flüssigen Sauerstoff soweit gefüllt, bis das Niveau in der Kapillare im Gesichtsfeld des Mikroskopes bequem einzustellen war. Danach wurde das obere Ende des Rohres am Pyknometer aussen geschlossen und zum Druckausgleich blieb nur die seitliche Öffnung 4 im Innern des Kryostaten offen. Alsdann wurde durch Einschalten des elektrischen Stromes in der Spule das Magnetfeld erzeugt und gleichzeitig das Niveau des flüssigen Sauerstoffes in der Kapillare im Mikroskop genau beobachtet.

J e d e s M a l b e i m E i n s c h a l t e n d e s M a g n e t f e l d e s h a b e i c h e i n e p l ö t z l i c h e r u c k a r t i g e S t e i g u n g d e s N i v e a u s d e s f l u s s i g e n S a u e r s t o f f e s i n d e r K a p i l l a r e d e s P y k n o m e t e r s b e o b a c h t e t. Diese ruckartige Steigung des Niveaus konnte leicht von den, bei offenem Pyknometer nicht zu vermeidenden, stetigen Veränderungen unterschieden werden. Der Versuch wurde mehrere Male bei 180 *A* Stromstärke in der Spule wiederholt; die gemessene Grösse der ruckartigen

Steigung des Niveaus des flüssigen Sauerstoffes in der Kapillare betrug dabei in der Skala des Mikrometerokulars des Mikroskopes 20 bis 22 Teilstriche. Wir nehmen als Mittelwert 21 Teilstriche an, was einem Volumenzuwachs des flüssigen Sauerstoffes von $7{,}1 . 10^{-5}$ cm^3 gleich ist.

Aus diesem Versuch erhalten wir den Zuwachs des spezifischen Volumens des flüssigen Sauerstoffes bei adiabatischer Magnetisierung, indem wir den gemessenen Volumenzuwachs durch die oben ermittelte Masse des flüssigen Sauerstoffes im Pyknometer dividieren; es folgt:

$$\Delta v = 2{,}7 \,.\, 10^{-6}\, cm^3/gr. \tag{2}$$

Der Versuch wurde bei 744 *mm Hg* Barometerstand durchgeführt, was einer Temperatur des Siedepunktes des Sauerstoffes von $90^0 K$ entspricht.

Die Messung war erschwert durch den unruhigen Stand des Niveaus des flüssigen Sauerstoffes in der Kapillare, was in der Verwendung eines offenen Pyknometers seine Ursache hat; das offene Pyknometer wurde bei diesem ersten Versuch nur wegen der grösseren Einfachheit und Bequemlichkeit benutzt.

II. Magnetokalorischer Effekt

Das Vorhandensein eines magnetokalorischen Effektes beim Sauerstoff wurde bereits von P. LANGEVIN (*8*) in seiner fundamentalen Arbeit über die Elektronentheorie des Paramagnetismus theoretisch vorausgesagt und für den gasförmigen Zustand schätzungsweise berechnet.

Der magnetokalorische Effekt lässt sich thermodynamisch behandeln [(*2*), *S.* 742; (*10*), *S.* 304] und es folgt für den adiabatischen Temperaturzuwachs dT eines paramagnetischen Körpers, der sich im Magnetfeld H befindet, beim Anwachsen der Feldstärke um $\mathrm{d}H$ folgende Gleichung:

$$\mathrm{d}T = -\frac{TH}{c_p} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p \cdot \mathrm{d}H,$$

wo c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck und χ die magnetische Suszeptibilität pro Masseneinheit des Körpers bedeuten. Danach wird der Temperaturzuwachs ΔT bei plötzlicher Entstehung eines Magnetfeldes von der Feldstärke H gleich

$$\Delta T = -\int_0^H \frac{TH}{c_p} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p \cdot \mathrm{d}H$$

sein. Der Temperaturzuwachs bei magnetokalorischem Effekt ist sehr klein, so dass wir sowohl T, als auch c_p und $\left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p$ während des Magnetisie-

rungsprozesses als konstant betrachten dürfen. Auf diese Weise nimmt das obige Integral folgende Form an:

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{TH^2}{c_p} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p. \tag{3}$$

Wir werden nun diesen magnetokalorischen Effekt für flüssigen Sauerstoff berechnen.

Zu diesem Zwecke setzen wir in die Gleichung *(3)* die aus den Versuchsbedingungen folgenden, oben angegebenen, Werte für T und H^2 ein.

Für die spezifische Wärme bei konstantem Druck c_p des flüssigen Sauerstoffes benutzen wir den von W. F. GIAUQUE und H. J. JOHNSTON *(6)* bei $90{,}33^0 K$ gemessenen Wert 0,406 *kal/gr*, der in absoluten Einheiten ausgedrückt gleich $1{,}7 . 10^7$ *erg/gr* ist.

Was nun die magnetische Suszeptibilität des flüssigen Sauerstoffes betrifft, so folgt aus den Messungen von A. PERRIER und H. KAMERLINGH ONNES *(11)*, dass der flüssige Sauerstoff das CURIE-WEISSsche Gesetz befolgt, wobei annähernd gilt [*2. S.* 701].

$$\chi = \frac{0{,}0315}{T + 40 . D}, \tag{4}$$

wo D die Dichte des flüssigen Sauerstoffes bedeutet, welche nach den Messungen von J. DEWAR *(4)* in folgender Weise von der Temperatur abhängig ist:

$$D = 1{,}5154 - 0{,}00442 T. \tag{5}$$

Indem wir (5) in (4) einsetzen und die Ableitung nach der Temperatur bilden, erhalten wir für $90^0 K$:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p = -1{,}43 . 10^{-6}.$$

Nach Einführung der obigen Zahlenwerte in die Gleichung (3) erhalten wir für den gesuchten magnetokalorischen Temperaturzuwachs:

$$\Delta T = 0{,}00021^0. \tag{6}$$

Aus der Gleichung (5) berechnen wir mit dem Werte (6) den entsprechenden Dichtezuwachs $\Delta_1 D$ des flüssigen Sauerstoffes und erhalten dafür $-9.2.10^{-7}$ gr/cm^3. Schliesslich mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\Delta_1 v}{v} = -\frac{\Delta_1 D}{D}$$

berechnen wir aus dem spezifischen Volumen des flüssigen Sauerstoffes und seiner Dichte bei $90^0 K$ den gesuchten Wert des magnetokalorischen

Volumenzuwachses $\Delta_1 v$ des flüssigen Sauerstoffes bei unserem Versuch und erhalten

$$\Delta_1 v = 0{,}74 \,.\, 10^{-6} \, cm^3/gr. \tag{7}$$

III. Isotherme Magnetostriktion

Der Vergleich des theoretisch zu erwartenden, durch den magnetokalorischen Effekt verursachten Volumenzuwachses $\Delta_1 v$ (7) mit dem beim Versuch gemessenen Wert Δv (1) zeigt, dass der letztere grösser ist, was vom Standpunkt unserer Auseinandersetzung in der Einleitung vollkommen verständlich ist. Die Differenz dieser beiden Werte soll nämlich den Volumenzuwachs $\Delta_2 v$ bei der isothermen Magnetostriktion darstellen und wir erhalten

$$\Delta_2 v = 1{,}96 \,.\, 10^{-6} \, cm^3/gr. \tag{8}$$

Wir wollen nun diese isotherme Magnetostriktion theoretisch berechnen.

Der entsprechende Volumenzuwachs bei der Magnetisierung bei konstantem Druck und Temperatur ist durch folgende Gleichung gegeben [2, S. 753].

$$\Delta_2 v = -\frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_T \tag{9}$$

Der Einfluss des Druckes auf die magnetische Suszeptibilität in unserem Falle kann nur durch die Dichteänderung des Stoffes bewirkt werden; demnach gilt folgende Beziehung:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial \chi}{\partial D}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)_T.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)_T = D.\gamma,$$

wo

$$\gamma = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

ist und die Kompressibilität bedeutet. Wir erhalten also:

$$\Delta_2 v = -\frac{1}{2} H^2 D \gamma \,.\left(\frac{\partial \chi}{\partial D}\right)_T. \tag{10}$$

Den partiellen Differentialquotienten der magnetischen Suszeptibilität nach der Dichte bei konstanter Temperatur berechnen wir aus der CURIE-WEISSschen Gleichung (4) und erhalten:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial D}\right)_T = -6.94 . 10^{-5}.$$

Indem wir diesen Wert nebst den oben angegebenen Werten für H^2 und D in die Gleichung (10) einsetzen, erhalten wir den gesuchten Wert für die isotherme Magnetostriktion des flüssigen Sauerstoffes in unserem Versuch; es folgt

$$\Delta_2 v = 2{,}13 . 10^3\, \gamma. \tag{11}$$

Leider ist die Kompressibilität des flüssigen Sauerstoffes nicht bekannt, wir wollen daher die Frage umkehren und mit Hilfe des Wertes (8) die Kompressibilität des flüssigen Sauerstoffes aus der obigen Gleichung (11) berechnen. Auf diese Weise erhalten wir für γ folgenden Zahlenwert:

$$\gamma = 9{,}2 . 10^{-10} cm^2/dyn, \tag{12}$$

also ca. $0{,}9 . 10^{-8}$ *cm²/kg.*

Bis jetzt ist nur für einige verflüssigte Gase die Kompressibilität bekannt, so z. B. bestimmte A. EUCKEN (*5*) aus seinen Messungen für Wasserstoff den Wert $1{,}95 . 10^{-8}$ cm^2/kg und für Argon $0{,}245 . 10^{-3}$ cm^2/kg. Neuerdings haben W. H. KEESOM un K. CLUSIUS (*7*) für flüssiges Helium einen ausserordentlich grossen Wert der Kompressibilität, nämlich von der Grössenordnung $10^{-2} cm^2/kg$, erhalten.

Wie wir nun sehen reiht sich der hier erhaltene Wert (12) der Kompressibilität des flüssigen Sauerstoffes sehr gut in die bis jetzt bekannten Kompressibilitäten verflüssigter Gase ein; er liegt zwischen der Kompressibilität des Wasserstoffes und des Argons.

Seinerzeit hat R. BAER (*1*) und auch H. LIEPMANN (*9*) aus der gemessenen Schallgeschwindigkeit bei $7{,}5 . 10^6$ Schwingungen pro *sec* die isotherme Kompressibilität des flüssigen Sauerstoffes berechnet und sie erhielten dabei einen bedeutend kleineren Wert von ca. $0{,}17 . 10^{-8}$ cm^2/kg.

Streszczenie

Autor przeprowadził doświadczenia nad zmianą objętości ciekłego tlenu w polu magnetycznym i stwierdził wzrost tej objętości w chwili powstawania pola magnetycznego. Zjawisko to, po raz pierwszy obserwowane w ciekłym tlenie, zostało nazwane przez autora „magnetostrykcją adiabatyczną" i zostało prowizorycznie zmierzone.

Przyrost objętości spowodowany magnetostrykcją adiabatyczną może być uważany za sumę przyrostu objętości wynikającego ze zwykłej, czyli izotermicznej, magnetostrykcji i przyrostu objętości wskutek zjawiska magnetokalorycznego. W ten sposób daje się teoretycznie obliczyć

współczynnik ściśliwości ciekłego tlenu na podstawie zmierzonych wartości magnetostrykcji; autor otrzymał wartość $0{,}9 \cdot 10^{-3}$ cm^2/kg, która zgadza się z bezpośrednio przez innych autorów zmierzonymi współczynnikami ściśliwości dla innych gazów skroplonych.

Literaturverzeichnis

1. BAER, R.: *Nature* **135**, 153 (1935).
2. DEBYE, P.: *Theorie der elektrischen und magnetischen Molekulareigenschaften.* Marx. Hdb. d. Rad. VI; Kap. IV. (1925).
3. DEWAR, J.: *Proc. Roy. Soc. London* **73**, 251 (1904).
4. DEWAR, J.: *Chem. News* **84**, 4 (1916).
5. EUCKEN, A.: *Verh. d. D. Phys. Ges.* **18**, 4 (1916).
6. GIAUQUE, W. F. and JOHNSTON, H. L.: *Journ. Amer. Soc.* 51, 2300 (1929).
7. KEESOM, W. H. and CLUSIUS, K.: *Leiden Comm. Nr.* 219 f (1932).
8. LANGEVIN, P.: *Ann. de Chim. et Phys.* (8) **5** 70 (1905).
9. LIEPMANN, H.: *Helv. Phys. Acta* **9**, 507 (1936).
10. MEISSNER, W.: *Phys. Z. S.* **35**, S. 304 (1934).
11. PERRIER, A. et KAMERLINGH ONNES. H.: *Leiden Comm. Nr.* Nr. 116 (1900), 124 (1911) und 139 (1914).
12. SANDERS, J. B. and TOOL, A.: *Bur. Stand. Journ. Res.* **11**, 799 (1933).

Berichtigung zu der Arbeit: „Über den Koppelungszustand von Molekülen in Flüssigkeiten"*

Errata do pracy:
„O stanie sprzężenia cząsteczek w cieczach"

von A. PIEKARA

Seite	136,	Zeile	2	von	unten:	anstatt	R	ist	R^*	zu	lesen;
„	137,	„		„	oben:	„	R	„	R^*	„	„ ;
„	137,	„		„	oben:	„	R	„	R^*	„	„ .

Berichtigung zu der Arbeit: „Die Deformierbarkeit der Moleküle im elektrischen Felde"**

Errata do pracy:
„Deformacja cząsteczek w polu elektrycznym"

von A. PIEKARA

Seite 156, Zeile 2 von unten: anstatt $\Theta_2 - \Theta_3$ ist $\Delta_2 + \Delta_3$ zu lesen.

* PIEKARA, A.: *Acta Phys. Pol.* **6**, 130 (1937).
** PIEKARA, A.: *Acta Phys. Pol.* **6**, 150 (1937).

Berichtigung zu der Arbeit:

Über den Kompaktheitsgrad von Molekülen in Flüssigkeiten

[illegible]

Berichtigung zu der Arbeit:

Die Deformierbarkeit der Moleküle im elektrischen Feld

[illegible]

Acta Phys. Pol. **6** (1937) Fasc. 3

TREŚĆ—CONTENTS—SOMMAIRE—INHALT